



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

EQUIVALENTES REDUCIDOS DE REDES ELÉCTRICAS OBTENIDOS MEDIANTE
MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN ELÉCTRICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL ELÉCTRICA

MARÍA JOSÉ ALFARO HERRERA

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO MORENO VIEYRA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO NAVARRO ESPINOSA
ÁNGELA FLORES QUIROZ
MATÍAS NEGRETE-PINCETIC

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
ANID Chile - ANID/BECAS/MAGÍSTER NACIONAL 22230918

SANTIAGO DE CHILE

2025

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA Y
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL ELÉCTRICA
POR: MARÍA JOSÉ ALFARO HERRERA
FECHA: 2025
PROF. GUÍA: RODRIGO MORENO VIEYRA

EQUIVALENTES REDUCIDOS DE REDES ELÉCTRICAS OBTENIDOS MEDIANTE MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

La reducción de sistemas eléctricos de potencia a redes equivalentes permite realizar estudios de operación y planificación con una menor carga computacional, procurando conservar la información más relevante del sistema original. Actualmente, las metodologías más utilizadas para este propósito son las de Ward y REI, junto con sus diversas variantes. Sin embargo, estas técnicas han sido diseñadas principalmente para estudios de flujos de potencia, análisis dinámicos y de estabilidad, sin considerar explícitamente los requerimientos del problema de despacho económico. Por otra parte, la mayoría de estas metodologías dependen de decisiones heurísticas, como la selección de las zonas a reducir o condensar, lo que introduce subjetividad en los resultados. El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología de reducción de nodos enfocada específicamente en preservar la fidelidad del despacho económico. Para ello, se ha diseñado un modelo de optimización, basado en los principios de optimización inversa y teoría de grafos, que asigna los nodos de la red original en una red equivalente con una cantidad de nodos predeterminada. Este modelo busca minimizar el error en los resultados del despacho económico de la red equivalente con respecto a la original, cumpliendo con ciertas restricciones técnicas y geográficas, como la ubicación de los recursos, los límites de flujo de las líneas equivalentes y la conexidad del sistema. Los beneficios del modelo se demuestran para distintos sistemas, donde las redes equivalentes generadas logran reproducir los resultados del despacho económico con errores hasta cuatro veces menores que los obtenidos mediante otras técnicas de reducción nodal.

Para mis papás.

Agradecimientos

A mis papás, gracias por haberme amado incondicionalmente. Por haberme criado fuerte y resiliente. Gracias por pavimentar el camino y caminar a mi lado mientras fue posible. Gracias por ser una inspiración y un ejemplo a seguir. Esto es por y para ustedes. Los extraño cada día. Espero que se sientan orgullosos.

A mi hermana, gracias por permitirme ser tu hermana y acompañarte. Gracias por decidir acompañarme y seguir haciéndolo. Gracias por ser mi motor de vida e impulsarme, quizás sin saberlo, a ser mejor cada día. Eres y siempre serás lo más importante.

A mi familia, tías, tíos, primas, primos y madrina, gracias por estar aquí a pesar de las idas y vueltas. Gracias por permitirme llorar y reír a su lado. Gracias por empujarme a cerrar este ciclo y creer en mí. Nada de esto sería lo mismo sin su compañía.

A mis amigos, todes, gracias por cruzarse en mi camino y seguir en él. Me siento privilegiada por tener su amistad.

A mis amigos del colegio y la vida, gracias por tantos años de amistad. Gracias por ser siempre un espacio seguro, por acompañarme en las buenas y en las malas. Gracias por su cariño incondicional.

A mis amigos de la universidad, mis chacritas, mis niñas eléctricas y mis niños de coordinación, gracias por compartir conmigo cada frustración y cada logro. Gracias por enriquecer este proceso con sus risas y alegrías.

A mis equipos de trabajo, en especial a Beauchef Proyecta y Coordinación, gracias por darme la oportunidad de crecer con ustedes. Gracias por todos los años compartidos.

A los profesores, profesoras, funcionarios y funcionarias que me tendieron una mano en más de una ocasión, gracias. Gracias por confiar en mi y darme las oportunidades que necesitaba, cuando las necesitaba.

A mi profesor guía, gracias por su gran apoyo, paciencia y entrega durante estos años. Gracias a los miembros de la comisión por formar parte de este proceso.

Gracias a cada persona que se cruzó en mi camino y dejó su huella. A quienes ya no están conmigo, ya sea porque nuestros caminos divergieron o porque simplemente la vida se los llevó muy pronto, gracias por haber sido parte de mi vida.

Tabla de Contenido

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Motivación	1
1.2. Hipótesis	1
1.3. Objetivo general	2
1.4. Objetivos específicos	2
1.5. Contribución	2
1.6. Alcances	3
1.7. Estructura del documento	3
2. Estado del arte	4
3. Metodología	10
3.1. Nomenclatura	10
3.1.1. Conjuntos e índices	10
3.1.2. Parámetros	10
3.1.3. Variables	11
3.2. Descripción general	12
3.3. Despacho económico	15
3.4. Requerimientos del modelo de reducción de nodos	15
3.5. Modelo de reducción de nodos	21
3.5.1. Función objetivo	23
3.5.2. Restricciones de despacho económico	24
3.5.3. Restricciones de asignación y unificación de recursos	27
3.5.4. Restricciones de capacidad máxima	29
3.5.5. Restricciones de conectividad	30
3.6. Modelos con dimensión temporal	30
3.6.1. Despacho económico para múltiples períodos de tiempo	30
3.6.2. Reducción de nodos para múltiples períodos de tiempo	31
4. Casos de estudio	33
4.1. Red de 4 nodos	33
4.2. Modelo WSCC 9 barras	34
4.3. Modelo IEEE 14 barras	37
5. Resultados y análisis	41
5.1. Ilustración del modelo	42
5.1.1. Demanda Potencia 1	42
5.1.2. Demanda Potencia 2	45

5.2.	Análisis de sensibilidad	49
5.2.1.	Modelo WSCC 9 barras	49
5.2.1.1.	Variación en número de nodos de red equivalente	50
5.2.1.2.	Exploración de parámetros	51
5.2.1.3.	Variación en ponderadores de despacho	54
5.2.1.4.	Variación en ponderadores de distancias	55
5.2.1.5.	Variación en ponderador de costo	57
5.2.1.6.	Exploración de modelo con dimensión temporal	59
5.2.2.	Modelo IEEE 14 barras	61
5.3.	Comparación con método de Ward	63
6.	Conclusiones	65
6.1.	Trabajo futuro	67
	Bibliografía	68
	Anexos	72
A.	Conjuntos separadores	72
B.	Red de 4 nodos, resultados de despacho	73
B.1.	Para demanda Potencia 1	73
B.2.	Para demanda Potencia 2	73
C.	Red de 4 nodos, asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos	74
C.1.	Para demanda Potencia 1	74
C.2.	Para demanda Potencia 2	75
D.	Modelo WSCC 9 barras, variación en ponderadores de despacho	76
E.	Modelo IEEE 14 barras, resultados 9 nodos	78

Índice de Tablas

2.1.	Resumen de las principales referencias.	9
4.1.	Características de generación, red 4 nodos.	34
4.2.	Características de líneas, red 4 nodos.	34
4.3.	Demanda sistema 4 barras.	34
4.4.	Características de barras, red WSCC 9 barras.	36
4.5.	Características de generación, red WSCC 9 barras.	36
4.6.	Características de líneas, red WSCC 9 barras.	36
4.7.	Demanda sistema WSCC 9 barras.	36
4.8.	Demanda de 24 horas, sistema WSCC 9 barras.	37
4.9.	Características de barras, red IEEE 14 barras.	38
4.10.	Características de generación, red IEEE 14 barras.	39
4.11.	Características de líneas, red IEEE 14 barras.	39
4.12.	Demanda sistema IEEE 14 barras.	40
5.1.	Resultados para variación de nodos de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	50
5.2.	Casos para exploración de parámetros.	52
5.3.	Resultados para exploración de parámetros, casos 1 y 2.	53
5.4.	Casos para exploración de parámetros, casos 3 y 4.	53
5.5.	Características de líneas para red equivalente WSCC 9 barras, demanda Día.	59
5.6.	Características de líneas, red equivalente WSCC 9 barras, demanda Noche.	60
5.7.	Características de líneas, red equivalente WSCC 9 barras, demanda 24 horas.	61
5.8.	Resultados de despacho para la demanda de 24 horas sobre las tres redes equivalentes propuestas.	61
5.9.	Resultados de despacho económico para equivalentes a través de método de Ward y modelo de reducción de nodos propuesto.	64
B.1.	Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 1 y reducción a 2 nodos.	73
B.2.	Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 1 y reducción a 3 nodos.	73
B.3.	Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 2 y reducción a 2 nodos.	73
B.4.	Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 2 y reducción a 3 nodos.	73

Índice de Figuras

3.1.	Diagrama general del modelo.	12
3.2.	Diagrama completo del modelo de reducción de nodos.	14
3.3.	Ejemplo de red de 4 nodos, requerimientos del modelo.	17
3.4.	Ejemplo requerimiento 3, asignación a 2 nodos.	18
3.5.	Ejemplo requerimiento 4, asignación a 2 nodos.	18
3.6.	Ejemplo requerimiento 5, asignación a 2 nodos factible.	19
3.7.	Ejemplo requerimiento 6, asignación a 2 nodos.	20
3.8.	Ejemplo de red de 4 nodos a escala, requerimientos del modelo.	20
3.9.	Ejemplo requerimiento 7, asignación a 2 nodos.	21
4.1.	Diagrama red de 4 nodos.	33
4.2.	Diagrama red WSCC 9 bus.	35
4.3.	Diagrama red WSCC 9 bus, modificación a 6 nodos.	35
4.4.	Diagrama red IEEE 14 barras.	38
5.1.	Despacho económico sobre red de 4 nodos, para demanda Potencia 1.	42
5.2.	Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 2 nodos, para demanda Potencia 1.	43
5.3.	Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 2 nodos y sus respectivos errores de despacho.	44
5.4.	Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 3 nodos, para demanda Potencia 1.	45
5.5.	Despacho económico sobre red de 4 nodos, para demanda Potencia 2.	46
5.6.	Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 2 nodos, para demanda Potencia 2.	47
5.7.	Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 2 nodos y sus respectivos errores de despacho.	47
5.8.	Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 3 nodos, para demanda Potencia 2.	48
5.9.	Despacho económico sobre red WSCC 9 barras, para demanda Día.	49
5.10.	Error de despacho para variación de nodos de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	51
5.11.	Error de despacho para exploración de parámetros, WSCC 9 barras, demanda Día.	54
5.12.	Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	55
5.13.	Error de despacho para variación de α_1 y β_1 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	56
5.14.	Error de despacho para variación de α_1 y β_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	57

5.15.	Error de despacho para variación de α_1 y γ de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	58
5.16.	Error de costo de despacho para variación de α_1 y γ de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	58
5.17.	Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda Día.	59
5.18.	Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda Noche.	60
5.19.	Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda de 24 horas.	60
5.20.	Error de despacho para variación de nodos de la red equivalente de IEEE 14 barras.	62
5.21.	Resultado de modelo de reducción de nodos, IEEE 14 barras a 9 nodos.	63
C.1.	Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos y sus respectivos errores de despacho.	74
C.2.	Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos y sus respectivos errores de despacho.	75
D.1.	Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.	76
D.2.	Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Noche.	77
E.1.	Resultado de modelo de reducción de nodos, IEEE 14 barras a 9 nodos.	78

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Motivación

El despacho económico constituye un problema central en la operación de sistemas eléctricos, pues determina la generación óptima de cada unidad al menor costo posible, sujeto a restricciones operacionales. Para capturar adecuadamente las condiciones de la red, estos modelos deben considerar representaciones detalladas del sistema eléctrico, lo que aumenta significativamente la complejidad computacional y la necesidad de recursos de cálculo [1–3].

Una estrategia ampliamente utilizada para mitigar esta dificultad consiste en emplear redes equivalentes, que permiten simplificar la representación del sistema manteniendo, en lo posible, la fidelidad de los resultados del despacho económico [4]. Sin embargo, las metodologías de reducción existentes, como las de Ward y REI [4, 5], han sido desarrolladas principalmente para estudios de flujo de potencia, estabilidad o fallas [6]. En la práctica, los operadores suelen recurrir a reducciones basadas en heurísticas, sin un criterio sistemático que garantice la precisión de los resultados [7].

Estas limitaciones ponen en evidencia la necesidad de desarrollar metodologías específicas para la construcción de redes equivalentes orientadas al despacho económico, capaces de reproducir con alta precisión los resultados de la red original y asegurar consistencia en las decisiones operativas.

1.2. Hipótesis

Es posible obtener redes eléctricas equivalentes reducidas capaces de replicar con alta precisión los resultados del despacho económico de la red original de mayor tamaño -evaluada principalmente en términos del error relativo en los despachos de generación-, y que, además, aseguren coherencia física, respetando la topología y restricciones técnicas del sistema, y coherencia geográfica, conservando la distribución espacial de los recursos eléctricos.

Además, es posible obtener dichas redes equivalentes reducidas mediante una metodología basada en modelos de optimización y los principios de la optimización inversa.

1.3. Objetivo general

El objetivo de este trabajo es plantear una metodología que permita obtener redes eléctricas equivalentes reducidas a partir de los resultados del despacho económico sobre la red original, respetando las restricciones físicas y geográficas de la red, donde la red equivalente sea capaz de replicar los resultados del despacho económico de la red original, o en su defecto, que estos presenten el menor error posible. Para cumplir con este objetivo, se propone un modelo de optimización basado en el modelo de despacho económico y los problemas de flujos y asignación en grafos.

1.4. Objetivos específicos

Los objetivos específicos se describen a continuación:

- Formular un modelo de optimización que permita obtener una red equivalente que minimice el error absoluto entre el despacho de cada generador en la red equivalente y la red inicial, mientras cumple con las restricciones de despacho económico multinodal con flujo DC y mantiene coherencia física y geográfica con la red inicial.
- Determinar estrategias de reducción de la red eléctrica a partir de un sistema genérico, explorando diferentes criterios y parámetros de entrada sobre el modelo.
- Evaluar el modelo en instancias de pequeña escala, analizando su desempeño en términos de factibilidad, precisión del despacho económico y coherencia física y geográfica con la red original, mediante métricas cuantitativas de error y distancia previamente definidas.

1.5. Contribución

Según el entendimiento actual del autor, este estudio introduce un enfoque pionero en la construcción de redes eléctricas equivalentes mediante modelos de optimización, siendo el primero en formular un modelo de optimización específicamente diseñado para la operación del sistema, minimizando el error en el despacho económico al reducir la red.

La metodología propuesta es capaz de representar la totalidad de un sistema eléctrico sin necesidad de dividirlo en áreas de relevancia, respetando restricciones físicas y geográficas de la red original. Además, proporciona una descripción acabada de la relación entre la red equivalente y la red original, estableciendo criterios claros para su construcción.

El modelo formulado es determinista, evitando el uso de heurísticas en su planteamiento matemático y utilizándolas sólo para su resolución computacional. Su estructura es flexible y por tanto permite ser adaptado a otros problemas en redes eléctricas.

De forma general, este trabajo contribuye al estudio de las redes equivalentes y sus diferentes aplicaciones en sistemas eléctricos de potencia, ampliando el conocimiento sobre estas y estableciendo un marco metodológico innovador para su aplicación en la operación del sistema y el despacho económico.

1.6. Alcances

Este estudio se enfoca en el desarrollo de un modelo de optimización orientado a la obtención de redes equivalentes que minimicen el error en los resultados de despacho económico, centrándose en la etapa de formulación del modelo dadas las características y restricciones ya presentadas. La validación del enfoque se realiza mediante instancias de pequeña escala y puntos de operación fijos.

Aspectos como la extensión del modelo para su aplicación en múltiples y variados puntos de operación, así como su escalabilidad en términos de desempeño computacional, no son abordados en este trabajo. Estas exclusiones responden a la decisión de acotar el alcance del estudio al desarrollo conceptual y metodológico de un modelo de optimización novedoso, enfocado en preservar la fidelidad del despacho económico al aplicar técnicas de reducción de red.

1.7. Estructura del documento

El documento se estructura como se propone a continuación. El Capítulo 2 describe una revisión bibliográfica de las metodologías de redes equivalentes más relevantes y su asociación con el problema de despacho económico. Luego, el Capítulo 3 presenta la metodología para la reducción de nodos y el modelo de optimización desarrollado. El Capítulo 4 describe los casos de estudio que se utilizan para ilustrar el modelo y presentar los resultados y análisis en el Capítulo 5. Finalmente, el Capítulo 6 propone las principales conclusiones del trabajo y posibles extensiones que se pueden realizar a partir de él.

Capítulo 2

Estado del arte

Las redes equivalentes constituyen una herramienta ampliamente utilizada en el análisis de sistemas de potencia, ya que permiten reducir la complejidad del sistema original para facilitar diversos tipos de estudios, tales como flujos de potencia, planificación y operación del sistema, así como análisis dinámicos de estabilidad [6]. Esta estrategia resulta particularmente útil en situaciones en las que no se dispone de información completa del sistema, ya sea debido a la indisponibilidad de mediciones o a restricciones de acceso a los datos [8].

En la práctica, los estudios sobre sistemas de potencia se centran usualmente en una región específica del sistema, lo que ha incentivado el desarrollo de técnicas orientadas a simplificar aquellas áreas consideradas menos relevantes. En este contexto, la mayoría de las metodologías de redes equivalentes proponen una partición del sistema en tres áreas: interna, de borde o frontera, y externa. El área externa, por su limitada influencia directa sobre el estudio principal, es generalmente la que se busca representar de forma simplificada, procurando que el comportamiento de la red equivalente reproduzca adecuadamente los efectos que tendría la red original sobre el área de interés [9–11].

Desde el punto de vista de su formulación, los modelos equivalentes pueden clasificarse en dos grandes categorías: estáticos y dinámicos. Los equivalentes estáticos son utilizados principalmente en estudios relacionados con flujos de potencia, planificación y operación del sistema, mientras que los equivalentes dinámicos se emplean en análisis relacionados con la estabilidad transitoria, el comportamiento dinámico del sistema y estudios de contingencias o fallas [11].

Asimismo, existen dos enfoques metodológicos predominantes para la formulación de redes equivalentes: el enfoque de reducción y el enfoque de identificación. El primero se basa en la eliminación o agrupación de ciertos elementos del sistema, buscando una representación más compacta sin comprometer significativamente la precisión del análisis. Por otro lado, el enfoque de identificación consiste en estimar los parámetros de un modelo equivalente a partir de datos obtenidos mediante simulaciones o mediciones, de forma que se reproduzca el comportamiento observado del sistema original [12].

Una de las primeras técnicas de reducción nodal desarrolladas y que ha sido una base para el desarrollo de métodos futuros, corresponde a la reducción de Kron que disminuye la cantidad de ecuaciones que describen un sistema mediante el uso de fasores [13, 14], modificando

la matriz de admitancia de un sistema al eliminar las filas y columnas asociadas a los nodos internos del área a reducir e incorporándolas al resto de los nodos. Debido al uso de fasores, este método se encuentra acotado a cierto tipo de redes. Sin embargo, es altamente usado en conjunto con otras metodologías, como lo descrito en [14], que propone un método basado en Kron y la representación de los sistemas de potencia a través de grafos.

De igual forma, el método de inyecciones de Ward [15] también es una de las primeras metodologías propuestas para redes equivalentes. En este modelo, la red se divide en el área de interés (o interna) y el área externa, y, usando los resultados de voltaje del flujo de potencia, las inyecciones de potencia se transforman a impedancia o fuentes de corriente en los nodos de borde (o frontera) entre ambas áreas [16]. En esta metodología no existe relación física entre las inyecciones equivalentes y la generación y carga del sistema original [7, 17]. Además, la selección de las áreas internas, de frontera y externas es decisión de quien propone la red.

Se han desarrollado múltiples variaciones de la técnica de Ward que buscan incorporar la inyección de reactivos al sistema, ya sea manteniendo generadores o creando elementos ficticios sobre el área de borde o área externa de la red equivalente, como las propuestas en [4, 18, 19].

En 1971 se propone el método REI (*Radial, Equivalent, Injection*), donde se transforma el área externa en una red pasiva, agrupando los elementos de generación en un nodo REI y los de carga en otro. Estos nodos son ficticios y concentran los efectos del sistema externo [16]. Este tipo de equivalente presenta problemas en el flujo de potencia para los voltajes de estos nodos REI y, por lo tanto, múltiples variaciones de este modelo se han desarrollado, como los presentados en [17, 18, 20].

Las redes equivalentes propuestas por las metodologías anteriores son utilizadas principalmente para redes equivalentes estáticas, y generalmente son útiles para un punto de operación específico y/o pequeñas desviaciones de este.

Los equivalentes de sistemas de potencia que preservan los límites se han descrito para que puedan ser utilizados en una variedad de puntos de operación [7], donde se destaca la importancia de definir las características y límites de las líneas para la red equivalente. En [7] se plantea un algoritmo de reducción que define límites sobre las líneas con este objetivo, donde se elimina un nodo, se calcula el equivalente de Kron y luego se procede a calcular los límites de línea, y así sucesivamente hasta completar todos los nodos del área a reducir.

Otras metodologías para la descripción de redes equivalentes se basan en la descripción de la matriz de factores de distribución de transferencia de potencia (PTDFs, por sus siglas en inglés), con el objetivo de disminuir el error entre el flujo de potencia de la red original y la red equivalente. Existen diversos métodos que consideran este enfoque [21, 22], como en [23], que se basa en los PTDFs para describir una red que respete los perfiles de congestión de la red original, o en [24], que se propone un método que calcula la susceptancia de las líneas basado en los PTDFs y un modelo de optimización no lineal.

Las metodologías para equivalentes dinámicos de sistemas de potencia tienen como objetivo describir un modelo que reproduzca el estado estacionario de la red original y sus

características dinámicas [25]. Estas redes son altamente desarrolladas para problemas dinámicos, como los análisis de estabilidad, de falla, etc.

Algunos ejemplos de este tipo de equivalentes se pueden observar en [25, 26], que presentan un algoritmo basado en cortes balanceados de la red a partir de la representación de espacio de estados y la aplicación de un modelo de reducción estructurado. Por otra parte, en [12] se presenta un método para un equivalente dinámico mediante una estrategia de optimización que se basa en un modelo de optimización multiobjetivo resuelto a través de algoritmos genéticos.

Otras metodologías específicas para modelos dinámicos corresponden a las desarrolladas a través de modelos de coherencia, como los propuestos en [27].

Los modelos descritos anteriormente comparten la principal característica de estar basados en flujos de potencia, ya sea AC o DC, y/o en el conocimiento a priori de la red. A continuación se presentan metodologías que son desarrolladas a partir de modelos *data-driven*.

Las ventajas de explorar este tipo de modelos es que, en principio, no es necesario tener conocimiento explícito de la red y permiten actualizar la red equivalente a medida que los datos lo suponen.

Algunos modelos utilizan mediciones de las unidades de medición fasorial (PMUs, por sus siglas en inglés) para identificar la topología equivalente, donde además se utilizan distintos criterios para describir la red óptima, como la optimización basada en normas ℓ_1 y ℓ_2 [28] o estimadores de mínimos cuadrados [29], entre otros.

De forma similar, en [30] se utilizan las mediciones obtenidas en el área de borde definida para describir un circuito equivalente adaptativo a las condiciones del sistema en tiempo real. En [10], las mediciones son utilizadas para describir además interconexiones entre los nodos del borde, donde los parámetros de la red desconocidos se estiman mediante mínimos cuadrados.

En [5] se presenta un modelo de reducción híbrido, donde el área externa es reducida mediante una variante de Ward y las características de la frontera son actualizadas en tiempo real a través de una red neuronal híbrida. El trabajo con redes neuronales también se aprecia en otros trabajos, como el propuesto en [31], donde se utilizan redes neuronales para representar de forma adaptativa los sistemas de potencia en redes equivalentes e identificar los elementos de gran sensibilidad en la red.

Así mismo, en [32] se utilizan las herramientas de grafo de conocimiento y red neuronal gráfica para identificar la topología de un sistema de potencia, haciendo seguimiento de las conexiones y desconexiones de líneas que se producen en la red.

Por otra parte, el uso de algoritmos de *cluster* para generar las redes equivalentes también ha sido adoptado en varias oportunidades. En [33] se presenta una metodología para describir redes equivalentes mediante la agrupación de nodos a través de *clusters* definidos por la distancia euclidiana, que consideran múltiples escenarios y puntos de operación. Las características de la red equivalente una vez realizados los *clusters* son definidas a partir de

un modelo de optimización.

De forma similar, en [34] se presenta un modelo de red equivalente para el sistema de potencia coreano, mediante un algoritmo basado en *k-means++* y los PTDFs. A partir del algoritmo propuesto se generan *clusters* de acuerdo a los PTDFs y luego se describen las líneas equivalentes de tal manera que las diferencias entre el flujo de potencia sobre la red original y la equivalente sean mínimas.

Uno de los trabajos más recientes de tipo *data-driven* es el desarrollado en [35] donde desarrollan un método de reducción para generar un modelo equivalente de flujo DC con funciones de carga no-lineales. Para ello, representan el sistema interno minimizando la diferencia entre el modelo equivalente DC y el original para múltiples puntos de operación, determinan la red equivalente del área externa y el lugar óptimo para posicionar las inyecciones de potencia en las barras de borde, describiendo un modelo de optimización para determinar las características de la red y la asignación en las barras de borde.

A continuación se presentan dos trabajos destacados en redes equivalentes que se encuentran directamente relacionados al despacho económico, pero poseen un enfoque en mercados eléctricos.

En [36] se describe una metodología para identificar la topología de una red usando los costos marginales localizados del sistema. Estos costos y sus respectivas variaciones en el tiempo son utilizados para estimar la matriz lagrangeana del problema de despacho económico mediante un estimador de máxima verosimilitud regularizada. A partir del paradigma de la optimización inversa¹ y la descripción dual del despacho económico, se describe un algoritmo de tres pasos que permite estimar la matriz propuesta.

Algunos trabajos posteriores de los autores también proponen enfoques similares, pero se escapan del problema de despacho económico [38]. Sin embargo, permiten una gran comprensión de la optimización inversa en el contexto de redes eléctricas.

Por otra parte, en [39] se propone una metodología para determinar la estructura del mercado eléctrico a partir de los precios de la energía y de transporte. Basado en la estructura del problema de despacho económico, y considerando que se conocen los precios y las adjudicaciones de energía, se propone determinar la estructura del mercado, cómo se utilizan los recursos de transmisión y las pérdidas relativas de distintas áreas del mercado.

Al igual que en [36], en [39] se vincula la metodología de optimización inversa con las redes eléctricas y, en particular, mercados eléctricos. Sin embargo, se escapa de los conceptos de redes equivalentes y su aplicación al problema de despacho económico.

En [40] se describen modelos para imponer conexidad sobre un problema de optimización entero utilizado en la planificación de distritos políticos. En el contexto de los problemas de optimización sobre grafos, se analiza un modelo basado en flujos y uno basado en cortes,

¹ La optimización inversa busca determinar los parámetros de un modelo de optimización (directo) que hacen que un conjunto de decisiones sea óptimo de acuerdo al modelo directo [37].

donde ambos permiten imponer conexidad sobre los subgrafos generados en la solución del problema. A partir de estos, se proponen mejoras a ambos modelos que exhiben mejor comportamiento computacional que sus respectivos.

Si bien los modelos están pensados para ser utilizados en un contexto completamente distinto al de las redes eléctricas, las características del problema planteado en este artículo permiten aplicar la base de los modelos que imponen conexidad al trabajo realizado para redes equivalentes.

En la tabla 2.1 se presenta un resumen de la bibliografía principal con el objetivo de compararla con el modelo propuesto en este trabajo.

Tabla 2.1: Resumen de las principales referencias.

Referencia	Principal contribución	Separación en zonas de interés	Data-driven	Basado en optimización	Equivalente en estado estacionario	Equivalente reducido	Determinista	Enfocado en problema de despacho económico
[7]	Se propone un algoritmo que busca describir equivalentes de red que preserven los límites de línea, mediante aproximaciones a través de PTDFs y un modelo de optimización cuadrático. En particular, busca identificar los parámetros por sobre la reducción de la red.	✓	No	✓	✓	No	✓	No
[12]	Se formula un problema de optimización multi-objetivo que busca describir un equivalente dinámico robusto de la red para estudios de estabilidad. Se propone su resolución mediante algoritmos genéticos, basándose también en mediciones PMUs.	✓	✓	✓	No	✓	No	No
[24]	A través de los PTDFs se describe una red equivalente reducida, donde luego se determina la susceptancia de las líneas asociadas al equivalente mediante modelos de optimización no lineal, reduciendo el error en los flujos de potencia.	✓	No	✓	✓	✓	✓	No
[35]	Se propone una metodología que determina un equivalente de red reducido mediante un problema de optimización, a la vez que optimiza la asignación de las inyecciones sobre los nodos de borde y determina funciones de carga no lineales para los puntos de operación dados.	✓	✓	✓	✓	✓	No	No
[36]	A partir de los resultados de precios de electricidad y despacho económico, se propone una metodología que es capaz de identificar la matriz lagrangeana del problema de despacho económico a partir de estimadores de máxima verosimilitud regularizados.	No	✓	✓	✓	✓	No	✓
Modelo propuesto	Se propone una metodología que es capaz de representar la totalidad de un sistema eléctrico sin necesidad de dividirlo en áreas de relevancia, minimizando el error en el despacho económico entre la red original y la reducida.	No	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Capítulo 3

Metodología

Este capítulo describe el modelo de reducción de redes eléctricas desarrollado para cumplir con los objetivos propuestos. En primer lugar, se definen los conjuntos, variables y parámetros asociados al modelo, junto a su respectiva nomenclatura, una breve descripción y su unidad de medida, si corresponde. Luego, se presenta una descripción general del modelo, y posteriormente el modelo de despacho económico a utilizar, para finalmente presentar el modelo de reducción de redes eléctricas mediante modelos de optimización, su función objetivo y restricciones asociadas.

3.1. Nomenclatura

3.1.1. Conjuntos e índices

$C(u, v)$	$u, v \in V$	Conjunto de (u, v) -separadores mínimos.
$d, f \in D$		Índices y conjunto de demandas.
E		Conjunto de aristas de un grafo.
$g, h \in G$		Índices y conjunto de generadores eléctricos.
$i, j, k \in I$		Índices y conjunto de nodos de red original.
$i, j \in I'$	$I' \subseteq I$	Conjunto de nodos de red con demanda y/o generación.
$s, r \in \tilde{I}$		Índices y conjunto de nodos de red equivalente.
$l \in L$	$L \subseteq I \times I$	Índice y conjunto de líneas de red original.
$e, f \in \tilde{L}$	$\tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}$	Índices y conjunto de líneas de red equivalente.
S	$S \subseteq V$	Conjunto (u, v) -separador para $u, v \in V$.
$t \in T$		Índice y conjunto de tiempo.
$u, v \in V$		Índices y conjunto de vértices de un grafo.

3.1.2. Parámetros

D_d	Potencia demandada por d .	MW
$d_{1_{i,j}}$	Largo de camino mínimo entre los nodos i y j .	-

$d_{2_{i,j}}$	Distancia euclidiana entre los nodos i y j .	Km
$end_{l,i}$	Parámetro binario de asignación de fin de línea, 1 si l termina en i .	-
$end_{e,s}$	Parámetro binario de asignación de fin de línea, 1 si e termina en s .	-
F_l^{max}	Capacidad máxima de línea l .	MW
M_z	Constante para linealización de z .	-
P_g^{max}	Potencia máxima del generador g .	MW
P_g^{min}	Potencia mínima del generador g .	MW
$start_{l,i}$	Parámetro binario de asignación de inicio de línea, 1 si l empieza en i .	-
$start_{e,s}$	Parámetro binario de asignación de inicio de línea, 1 si e empieza en s .	-
\tilde{X}	Reactancia referencial de línea.	Ohm
X_l	Reactancia de línea l .	Ohm
X^{max}	Reactancia máxima de líneas de la red original.	Ohm
X^{min}	Reactancia mínima de líneas de la red equivalente.	Ohm
$x_{D_{d,i}}$	Parámetro binario de asignación de demanda, 1 si d está asignada a nodo i .	-
$x_{P_{g,i}}$	Parámetro binario de asignación de generador, 1 si g está asignado a nodo i .	-
α_1	Ponderador de error absoluto de potencia.	-
α_2	Ponderador de error máximo de potencia.	-
β_1	Ponderador de distancias de camino mínimo.	-
β_2	Ponderador de distancias euclidianas.	-
γ	Ponderador de error de costo total.	-
$\Delta\tilde{X}_e$	Auxiliar, diferencial de reactancia de línea e .	Ohm
ΔX^{max}	Cota superior para diferencial de reactancia de línea ΔX .	Ohm
$\Delta\tilde{X}^{max}$	Auxiliar, cota superior para cota de diferencial de flujo $\Delta\tilde{F}$.	Ohm
ΔX^{min}	Cota inferior para diferencial de reactancia de línea ΔX .	Ohm
$\Delta\tilde{X}^{min}$	Auxiliar, cota inferior para cota de diferencial de flujo $\Delta\tilde{F}$.	Ohm
$\Delta\theta_e$	Desfase angular de línea e .	°

3.1.3. Variables

$C_g(\cdot)$	Función de costos de generador g .	-
C^{aux}	Auxiliar, costo total de generación.	\$
F_l	Flujo de línea l .	MW
\tilde{F}_e	Flujo de línea e .	MW

\tilde{F}_e^{max}	Capacidad máxima de línea e .	MW
$\tilde{F}_{s,r}^{max}$	Capacidad máxima de línea que inicia en nodo s y finaliza en r .	MW
P_g	Potencia generada por g en despacho para red original.	MW
\tilde{P}_g	Potencia generada por g en despacho para red equivalente.	MW
P_g^{aux}	Auxiliar, error absoluto de potencia de generador g .	MW
P_ε	Error máximo de potencia.	MW
r_{1s}	Largo de camino mínimo acumulado en nodo s .	-
r_{2s}	Distancia euclidianda acumulada en nodo s .	Km
w_e^θ	Variable binaria de dirección de flujo de línea $e = (s, r)$, 1 si $\theta_s - \theta_r \geq 0$.	-
\tilde{X}_e	Reactancia de línea e .	Ohm
$y_{D_{d,s}}$	Variable binaria de asignación de demanda, 1 si d se asigna a nodo s .	-
$y_{P_{g,s}}$	Variable binaria de asignación de generador, 1 si g se asigna a nodo s .	-
$z_{i,s}$	Variable binaria de asignación de nodos, 1 si i se asigna a nodo s .	-
$\Delta\tilde{F}_e$	Diferencia de flujo de línea e .	MW
θ_i	Desfase angular de nodo i .	°
$\tilde{\theta}_s$	Desfase angular de nodo s .	°

3.2. Descripción general

La figura 3.1 muestra un diagrama general del modelo desarrollado. Este consta principalmente de dos procesos. En primera instancia, a partir de una red inicial ($n \in \mathbb{N}$ nodos) y una demanda de carga, se realiza un despacho económico. Posteriormente, a partir de las características de la red inicial, la cantidad de nodos deseados para la red equivalente ($m \in \mathbb{N}$, $1 < m < n$) y los resultados obtenidos anteriormente, se realiza el proceso de reducción nodal que permite obtener las características de la red equivalente, la asignación de los nodos de la red inicial a aquellos de la red equivalente y el despacho en esta.

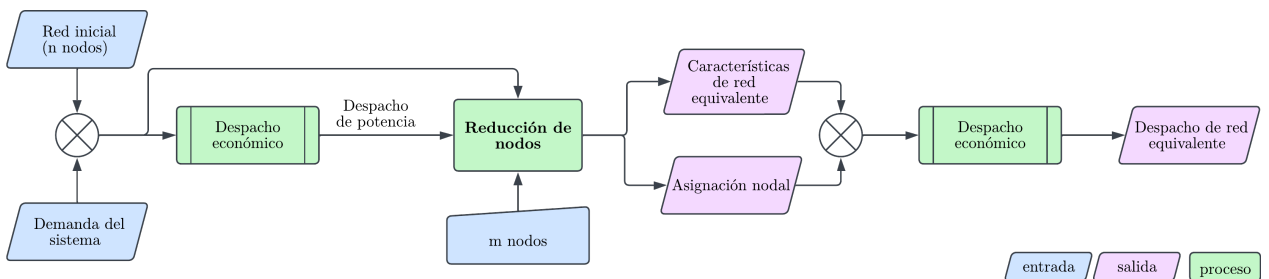


Figura 3.1: Diagrama general del modelo.

En la figura 3.2 es posible observar un diagrama en detalle del modelo. La primera etapa corresponde a la optimización de un despacho económico sobre la red eléctrica a reducir.

Para este despacho solo se encuentra modelada la generación térmica y el flujo es de tipo DC.

La segunda etapa es la correspondiente a la reducción nodal. En esta se presentan tres procesos preliminares, el proceso principal asociado a la optimización y uno posterior.

Los procesos preliminares permiten crear la estructura de una red equivalente para un número de nodos dado, calcular las distancias de camino mínimo y euclidiana entre cada par de nodos y describir los conjuntos separadores mínimos.

El proceso principal correspondiente al modelo de optimización de reducción de nodos se presenta al centro de la figura 3.2, donde la función objetivo propone minimizar el error de despacho y la suma de las distancias en cada nodo de la red equivalente, cumpliendo con restricciones de despacho económico, asignación y unificación de recursos, capacidad máxima de líneas y de conexidad en nodos equivalentes.

Finalmente, existe un proceso posterior que permite describir las características de la red equivalente a partir de los resultados del modelo de optimización para aquellas variables que no están de forma explícita en el modelo.

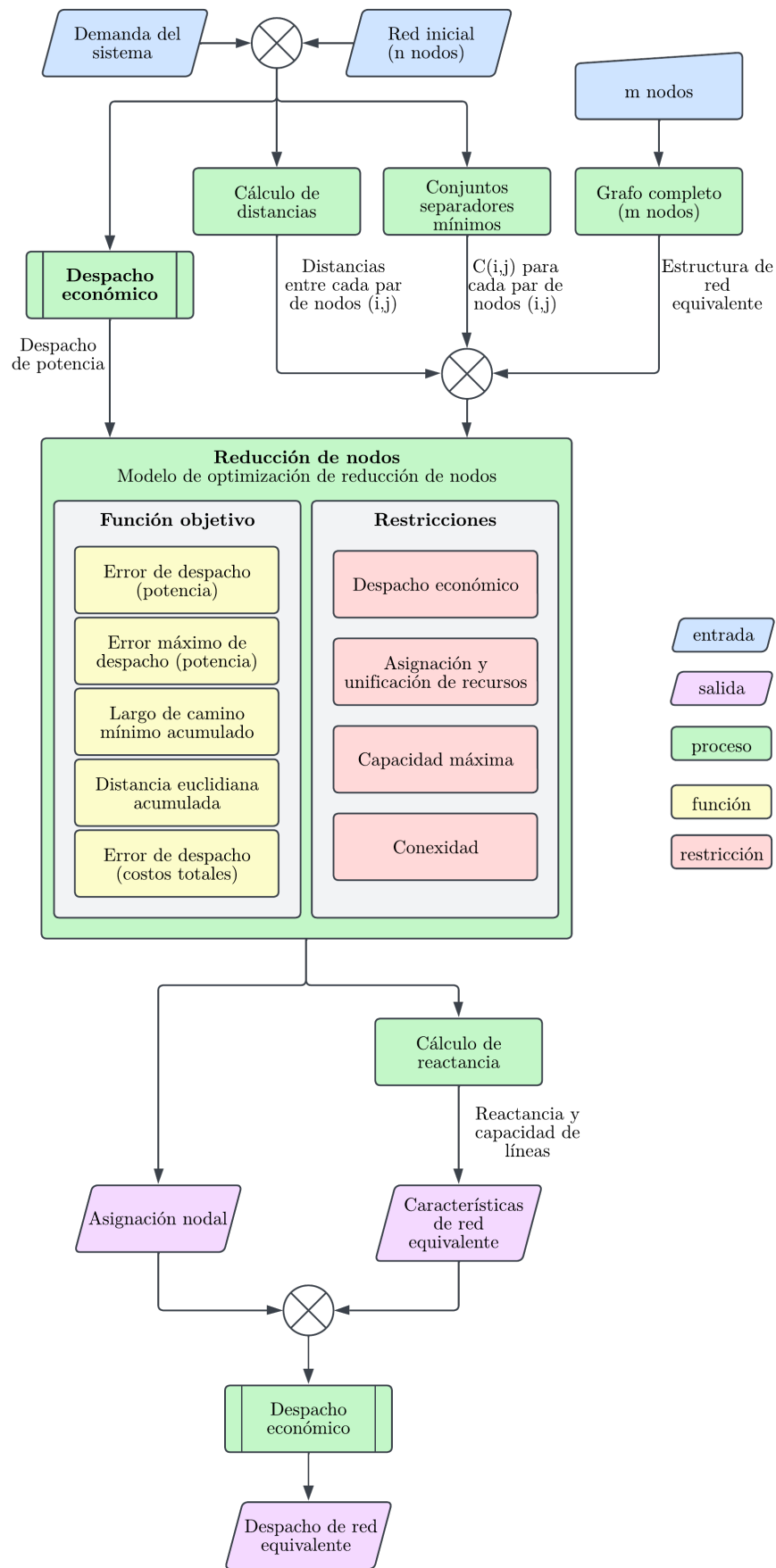


Figura 3.2: Diagrama completo del modelo de reducción de nodos.

3.3. Despacho económico

Tal como se indica anteriormente, el despacho económico corresponde a la primera etapa del modelo. El modelo de despacho económico se utiliza exclusivamente para obtener los resultados de generación y costos de la red y, por lo tanto, puede considerarse cualquier modelo de despacho económico multinodal en esta etapa. En este caso, se plantea un modelo de despacho económico multinodal con flujo DC, donde todas las centrales de generación están modeladas como centrales térmicas.

El modelo de optimización utilizado para el despacho económico se presenta en (3.1). Este despacho minimiza el costo total del sistema, dado exclusivamente por la generación de las centrales eléctricas, sujeto a que se cumplan las restricciones de balance nodal, flujo DC, mínimos y máximos técnicos de las centrales y de capacidad de línea.

$$\begin{aligned}
\min_{P,F,\theta} \quad & \sum_{g \in G} C_g(P_g) \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{g \in G} P_g \cdot x_{P_g,i} = \sum_{d \in D} D_d \cdot x_{D_d,i} + \sum_{l \in L} F_l \cdot \text{start}_{l,i} - \sum_{l \in L} F_l \cdot \text{end}_{l,i} \quad \forall i \in I \\
& F_l = \frac{\theta_i - \theta_j}{X_l} \quad \forall l = (i, j) \in L = I \times I \\
& P_g \leq P_g^{max} \quad \forall g \in G \\
& P_g \geq P_g^{min} \quad \forall g \in G \\
& F_l \leq F_l^{max} \quad \forall l \in L \\
& F_l \geq -F_l^{max} \quad \forall l \in L
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Los resultados del modelo se representan por las mismas variables con el superíndice *.

3.4. Requerimientos del modelo de reducción de nodos

La segunda etapa corresponde a la reducción de la red eléctrica en una equivalente. Para ello se define un modelo de optimización que debe cumplir con ciertos requerimientos.

La red equivalente se define por:

- La cantidad de nodos.
- La estructura que describe las líneas que conectan estos nodos.
- Las características de las líneas, es decir, impedancia y capacidad máxima.
- La asignación de cada nodo de la red inicial en los nodos de la red equivalente, lo que se traduce en dónde se encontrará cada elemento de la red inicial (generadores y demandas).

Para descubrir la topología que cumple de mejor forma con los objetivos propuestos, se propone la construcción de una red equivalente cuya topología corresponde a la de un grafo completo.

Se define únicamente la cantidad $m \in \mathbb{N}$ de nodos que se desea para la red equivalente, y a partir de estos se define un grafo completo de m nodos, es decir, un grafo donde todos los nodos se conectan con todos. Esto es en una red eléctrica completamente enmallada.

La definición de una red completamente enmallada permite explorar todas las opciones para la red equivalente. Si bien es posible predefinir otras estructuras para la red equivalente, al hacerlo podrían existir topologías con mejores resultados que no se consideren.

Cabe destacar que para que la red equivalente tenga sentido con su respectiva red inicial, m debe ser menor a la cantidad de nodos $n \in \mathbb{N}$ de la red inicial. Además, m debe ser mayor estricto que 1, pues en caso contrario, la red se reduce al caso uninodal.

Por otra parte, para satisfacer los objetivos específicos, se propone que la red equivalente cumpla los siguientes requerimientos:

1. El error absoluto entre el despacho de cada generador en la red equivalente y la red inicial debe ser mínimo.
2. Se debe cumplir con las restricciones del despacho económico multinodal con flujo DC sobre la red equivalente.
3. Los recursos que se encuentran agrupados en la red inicial deben permanecer agrupados en la red equivalente.
4. Todos los nodos de la red inicial deben quedar asignados a un nodo en la red equivalente.
5. Las características de la red equivalente (impedancia y capacidad máxima de línea) deben ser coherentes con las de la red inicial, de modo que se mantenga una representación técnicamente realista de los flujos y restricciones del sistema.
6. Si se asignan dos nodos de la red inicial a un mismo nodo en la red equivalente, entonces cualquier nodo que los separa en la red inicial debe tener la misma asignación en la red equivalente.
7. Se debe priorizar que la asignación de nodos mantenga coherencia con la distribución geográfica de la red inicial, procurando que los nodos agrupados correspondan a zonas geográficas próximas.

El primer requerimiento refiere a que, al realizar un despacho económico en la red inicial y uno con las mismas características de demanda en la red equivalente, el error entre la potencia a generar por cada central en ambas redes debe ser mínimo. Por ejemplo, si en la red inicial se tiene un generador G_1 que para cierto despacho genera P_1 , para la red equivalente se espera que su generación \tilde{P}_1 para el mismo despacho sea igual o lo más similar posible, es decir, que $|\tilde{P}_1 - P_1| \simeq 0$.

Por otra parte, el segundo requerimiento describe que la red equivalente debe cumplir con las restricciones de un despacho económico multinodal con flujo DC, es decir, que las restricciones de balance nodal se deben cumplir para todos los nodos de la red equivalente y su respectiva asignación. Las restricciones de flujo DC y de capacidad de línea también se deben respetar para las líneas de la red equivalente. Así mismo, se deben cumplir las restricciones de mínimos y máximos técnicos de las centrales.

Con respecto al requerimiento propuesto en 3, este significa que si en un nodo de la red inicial existen dos o más recursos, estos deben asignarse al mismo nodo de la red equivalente. Por ejemplo, si se considera la red propuesta en 3.3 y una red equivalente de 2 nodos, existen varias asignaciones posibles.

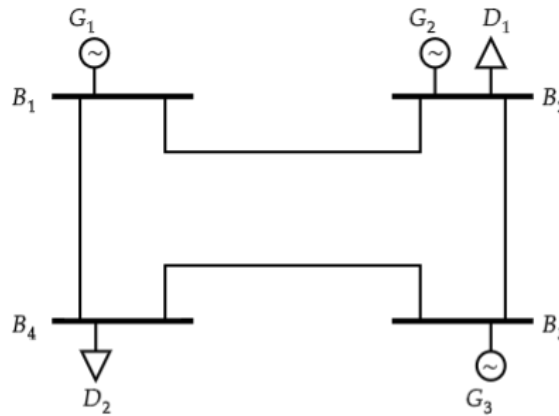
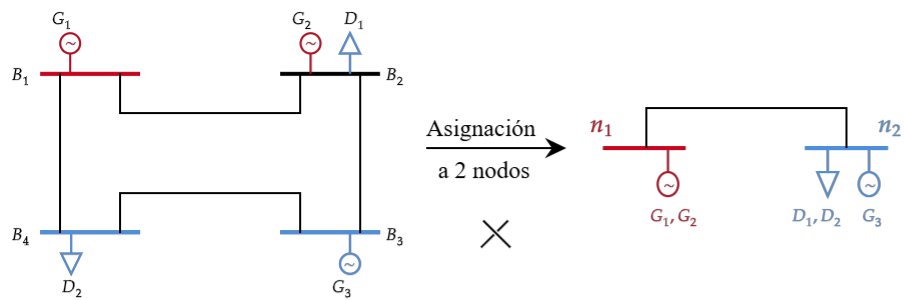


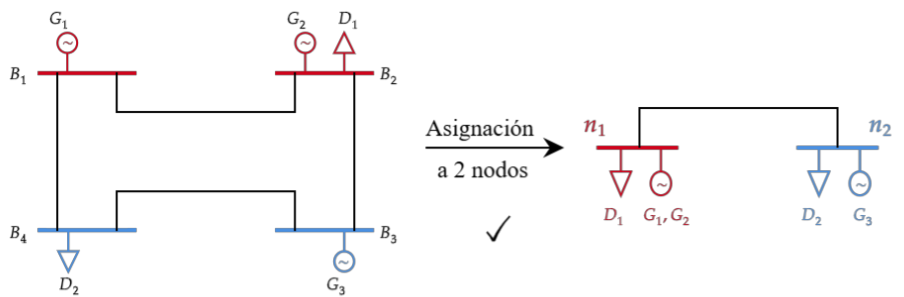
Figura 3.3: Ejemplo de red de 4 nodos, requerimientos del modelo.

En la figura 3.4.a se presenta una asignación que no es factible con el requerimiento en cuestión, puesto que G_2 y D_1 quedarían asignados a distintos nodos en la red equivalente. Sin embargo, si dicho generador y demanda se asignaran al nodo n_1 de color rojo (o ambos al nodo n_2 de color azul), como se presenta en 3.4.b, entonces la asignación sí sería factible en términos del requerimiento 3.

El requisito 4 propone que no deben quedar nodos de la red inicial sin asignar en la red equivalente. Por ejemplo, considerando la misma red presentada en la figura 3.3, en la figura 3.5 se presentan dos asignaciones. La primera, propuesta en 3.5.a no es factible, pues el nodo B_3 no se encuentra asignado a ningún nodo de la red equivalente (n_1 y n_2). Sin embargo, si dicha barra se asigna a n_2 (o n_1), entonces la asignación sería factible de acuerdo al requisito 4.

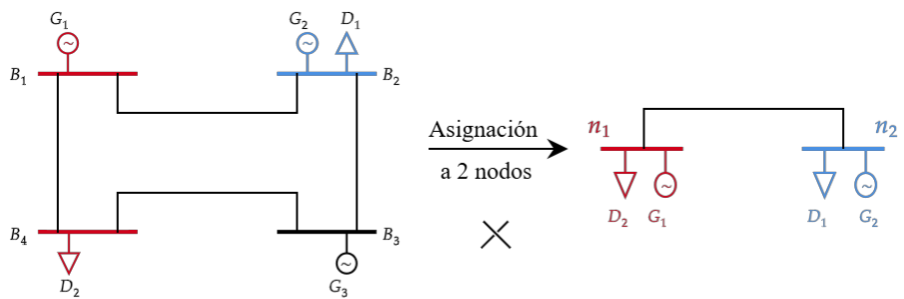


(a) NO factible.

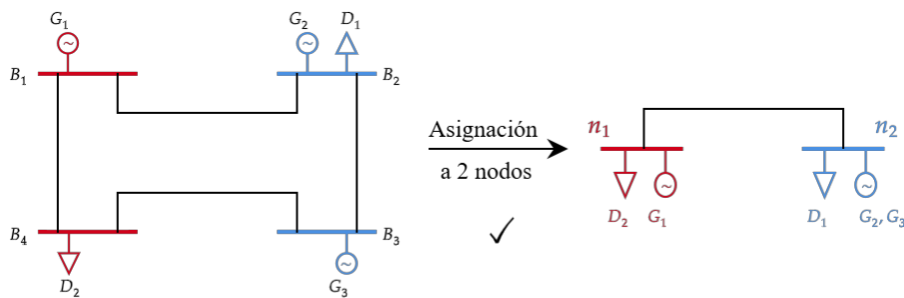


(b) Factible.

Figura 3.4: Ejemplo requerimiento 3, asignación a 2 nodos.



(a) NO factible.



(b) Factible.

Figura 3.5: Ejemplo requerimiento 4, asignación a 2 nodos.

Por otra parte, el quinto requerimiento describe que las características de las líneas de la red equivalente deben ser coherentes con las de la red inicial. Es decir, debe existir una relación clara entre las impedancias y las capacidades de línea de la red inicial con la equivalente. Por ejemplo, si en la red de 4 nodos cada línea tuviese una capacidad máxima de 100 [MW], en la figura 3.6 se propone una asignación factible con características coherentes a la red inicial de la figura 3.3, donde la capacidad de línea de la red equivalente no puede superar la suma de las líneas que unen ambos nodos de la red equivalente en la asignación.

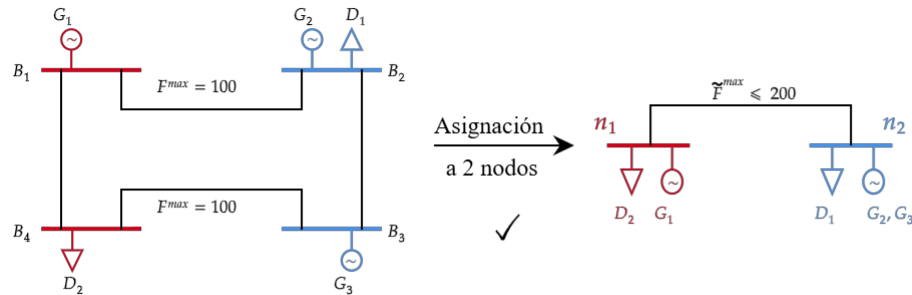
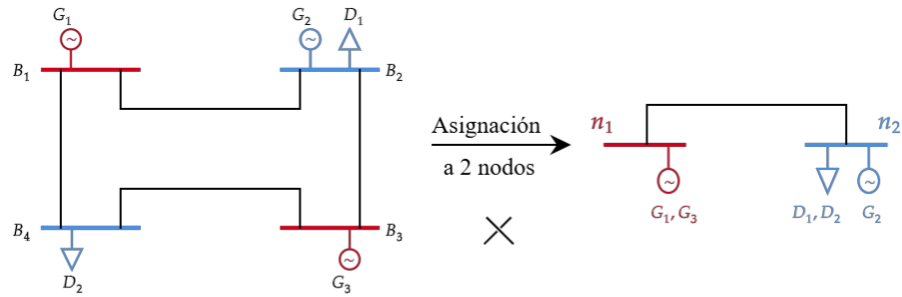


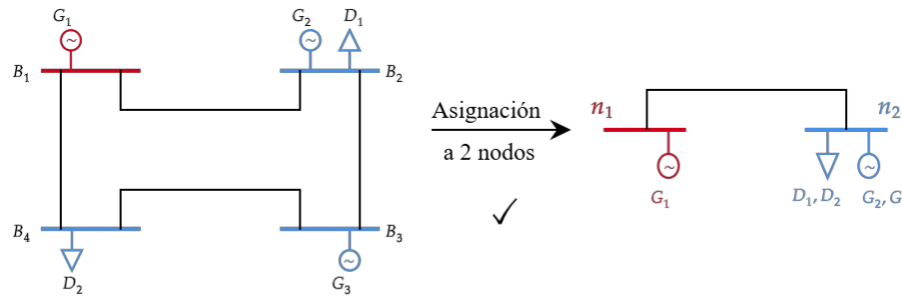
Figura 3.6: Ejemplo requerimiento 5, asignación a 2 nodos factible.

El requisito 6 propone que exista un camino entre las barras de la red inicial asignadas a un mismo nodo. Si se considera la red de 4 nodos presentada anteriormente, es posible observar que no existe una línea directa entre B_2 y B_4 , sino que para conectarlas se debe utilizar obligatoriamente B_1 o B_3 . El requerimiento en cuestión propone que, para asignar al mismo nodo de la red equivalente las barras B_2 y B_4 , entonces se debe asignar también B_1 o B_3 a tal nodo. De esta forma, dentro del mismo nodo en la red equivalente, no quedarían asignadas barras que se encuentren “desconectadas” entre ellas.

En la figura 3.7 se presentan dos asignaciones. La primera ejemplifica el caso donde B_2 y B_4 se encuentran asignadas al mismo nodo, pero dado lo anterior, este caso no sería factible. Así, la segunda presenta un caso factible donde B_2 y B_4 se encuentran asignadas al mismo nodo. Aquí se asigna la barra B_3 que los conecta al nodo n_2 de color azul, pero podría haber sido la barra B_1 e igual sería una solución factible.



(a) NO factible.



(b) Factible.

Figura 3.7: Ejemplo requerimiento 6, asignación a 2 nodos.

Finalmente, el requerimiento 7 plantea que, en caso de que dos asignaciones sean factibles y óptimas en términos del primer requerimiento, entonces el modelo debe elegir aquella que tenga mayor concordancia con la distribución geográfica del sistema.

Si se considera que la red presentada en la figura 3.8 se encuentra escalada, y que las distancias en el diagrama están en la misma proporción que lo estarían en la realidad, es posible notar que las barras B_1 y B_4 se encuentran más cerca entre sí, así como las barras B_2 y B_3 .

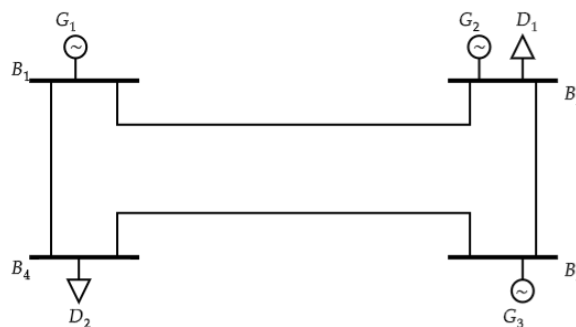
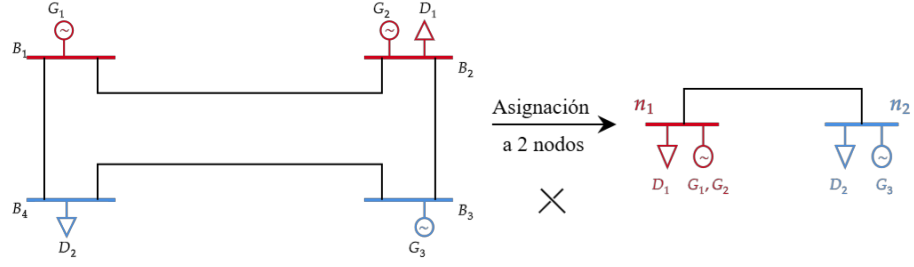


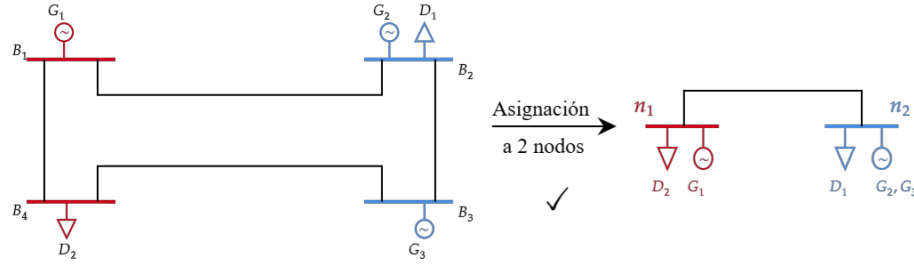
Figura 3.8: Ejemplo de red de 4 nodos a escala, requerimientos del modelo.

Luego, si se consideran dos asignaciones factibles como las propuestas en 3.9 y ambas son óptimas de acuerdo a lo propuesto en 1, entonces la asignación presentada en 3.9.b es

prioritaria sobre la presentada en 3.9.a, puesto que las distancias de los nodos agrupados en n_1 de color rojo, son menores en 3.9.b que en 3.9.a, y lo mismo ocurre con aquellos nodos asignados en n_2 .



(a) Factible, pero no prioritaria según 7.



(b) Factible y prioritaria según 7.

Figura 3.9: Ejemplo requerimiento 7, asignación a 2 nodos.

A partir de la definición de la red y los requerimientos presentados anteriormente, es posible describir el modelo de optimización que concluyen con la red equivalente con su respectiva función objetivo y restricciones.

3.5. Modelo de reducción de nodos

El modelo de optimización debe cumplir con las restricciones y objetivos descritos anteriormente para la red equivalente. A partir de la red inicial y su respectivo despacho económico, así como de la estructura propuesta para la red equivalente, se propone un programa lineal entero mixto.

A continuación se presenta la formulación matemática del modelo de optimización de reducción de nodos y posteriormente, la descripción detallada de la función objetivo y restricciones.

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\tilde{P}, \tilde{F}, \tilde{\theta}, y_P, y_D \\ \tilde{F}^{max}, \Delta \tilde{F}}} \\
 & \alpha_1 \sum_{g \in G} |P_g^* - \tilde{P}_g| + \alpha_2 P_\varepsilon + \beta_1 \sum_{s \in \tilde{I}} r_{1s} + \beta_2 \sum_{s \in \tilde{I}} r_{2s} \\
 & + \gamma \left| \sum_{g \in G} C_g(P_g^*) - \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_g) \right|
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{g \in G} \tilde{P}_g \cdot y_{P_{g,s}} = \sum_{d \in D} D_d \cdot y_{D_{d,s}} + \sum_{e \in \tilde{L}} \tilde{F}_e \cdot \text{start}_{e,s} - \sum_{e \in \tilde{L}} \tilde{F}_e \cdot \text{end}_{e,s} \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.3a)$$

$$\tilde{F}_e = \frac{\tilde{\theta}_s - \tilde{\theta}_r}{\tilde{X}} + \Delta \tilde{F}_e \quad \forall e = (s, r) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I} \quad (3.3b)$$

$$\tilde{P}_g \leq P_g^{\max} \quad \forall g \in G \quad (3.3c)$$

$$\tilde{P}_g \geq P_g^{\min} \quad \forall g \in G \quad (3.3d)$$

$$\tilde{F}_e \leq \tilde{F}_e^{\max} \quad \forall e \in \tilde{L} \quad (3.3e)$$

$$\tilde{F}_e \geq -\tilde{F}_e^{\max} \quad \forall e \in \tilde{L} \quad (3.3f)$$

$$\sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_{g,s}} = 1 \quad \forall g \in G \quad (3.4a)$$

$$\sum_{s \in \tilde{I}} y_{D_{d,s}} = 1 \quad \forall d \in D \quad (3.4b)$$

$$x_{P_{g,i}} \cdot x_{D_{d,i}} \leq \sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_{g,s}} \cdot y_{D_{d,s}} \quad \forall i \in I, \forall g \in G, \forall d \in D \quad (3.5a)$$

$$x_{P_{g,i}} \cdot x_{P_{h,i}} \leq \sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_{g,s}} \cdot y_{P_{h,s}} \quad \forall i \in I, \forall g \in G, \forall h \in G \quad (3.5b)$$

$$x_{D_{d,i}} \cdot x_{D_{f,i}} \leq \sum_{s \in \tilde{I}} y_{D_{d,s}} \cdot y_{D_{f,s}} \quad \forall i \in I, \forall d \in D, \forall f \in D \quad (3.5c)$$

$$\Delta \tilde{F}_e \geq -(\tilde{\theta}_s - \tilde{\theta}_r) \cdot \Delta \tilde{X}^{\max} \cdot w_e^\theta \quad \forall e = (s, r) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I} \quad (3.6a)$$

$$\Delta \tilde{F}_e \leq -(\tilde{\theta}_s - \tilde{\theta}_r) \cdot \Delta \tilde{X}^{\max} \cdot (1 - w_e^\theta) \quad \forall e = (s, r) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I} \quad (3.6b)$$

$$(\tilde{\theta}_s - \tilde{\theta}_r) \cdot w_e^\theta \geq 0 \quad \forall e = (s, r) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I} \quad (3.6c)$$

$$(\tilde{\theta}_s - \tilde{\theta}_r) \cdot (1 - w_e^\theta) \leq 0 \quad \forall e = (s, r) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I} \quad (3.6d)$$

$$z_{i,s} = \begin{cases} 1 & \sum_{g \in G} x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} + \sum_{d \in D} x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} \geq 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.7)$$

$$\sum_{s \in \tilde{I}} z_{i,s} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in I} z_{i,s} \geq 1 \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{s,r}^{max} \leq & \sum_{l \in L} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} z_{i,s} \cdot z_{j,r} \cdot start_{l,i} \cdot end_{l,j} \cdot F_l^{max} \\ & + z_{i,s} \cdot z_{j,r} \cdot start_{l,j} \cdot end_{l,i} \cdot F_l^{max} \quad \forall s \in \tilde{I}, \quad \forall r \in \tilde{I} \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\tilde{F}_e^{max} = \sum_{s \in \tilde{I}} \sum_{r \in \tilde{I}} start_{e,s} \cdot end_{r,r} \cdot \tilde{F}_{s,r}^{max} \quad \forall e \in \tilde{L} \quad (3.10b)$$

$$\sum_{i,j \in I} z_{i,s} \cdot z_{j,s} \cdot d_{1,i,j} \leq r_{1s} \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.11a)$$

$$\sum_{i,j \in I} z_{i,s} \cdot z_{j,s} \cdot d_{2,i,j} \leq r_{2s} \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.11b)$$

$$z_{i,s} \cdot z_{j,s} \leq \sum_{k \in S} z_{k,s} \quad \forall S \in C(i,j), \quad \forall (i,j) \in I \times I, \quad \forall s \in \tilde{I} \quad (3.12)$$

$$P_g^* - \tilde{P}_g \leq P_\varepsilon \quad \forall g \in G \quad (3.13a)$$

$$P_g^* - \tilde{P}_g \geq -P_\varepsilon \quad \forall g \in G \quad (3.13b)$$

$$y_{P_{g,s}} \in \{0, 1\} \quad \forall (g,s) \in G \times \tilde{I} \quad (3.14a)$$

$$y_{D_{d,s}} \in \{0, 1\} \quad \forall (d,s) \in D \times \tilde{I} \quad (3.14b)$$

$$w_e^\theta \in \{0, 1\} \quad \forall e \in \tilde{L} \quad (3.14c)$$

$$z_{i,s} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,s) \in I \times \tilde{I} \quad (3.14d)$$

3.5.1. Función objetivo

La función objetivo presentada en (3.2) consta de cinco términos y busca cumplir con los requerimientos propuestos en 1, 6 y 7. En primer lugar, se busca que el despacho del modelo creado se parezca lo más posible al despacho del modelo original, tanto en los resultados de potencia como en los costos totales. En segundo lugar, se busca minimizar las distancias entre los vértices que se agrupan, considerando tanto la distancia asociada al largo de camino mínimo como la distancia geográfica.

En la ecuación (3.15) se presenta nuevamente la función objetivo, indicando los términos asociados.

$$\underbrace{\alpha_1 \sum_{g \in G} |P_g^* - \tilde{P}_g|}_{(a)} + \alpha_2 \underbrace{P_\varepsilon}_{(b)} + \beta_1 \underbrace{\sum_{s \in \tilde{I}} r_{1s}}_{(c)} + \beta_2 \underbrace{\sum_{s \in \tilde{I}} r_{2s}}_{(d)} + \gamma \underbrace{|\sum_{g \in G} C_g(P_g^*) - \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_g)|}_{(e)} \quad (3.15)$$

Los términos (a) , (b) y (e) de la función objetivo planteada en (3.15) permiten cumplir con el requerimiento 1. El primer término (a) corresponde a la suma del error puntual absoluto en el despacho de cada generador para la red equivalente y la red inicial. Mientras que el segundo término (b) se propone para minimizar el error máximo de potencia P_ε definido a partir de las inecuaciones planteadas en (3.13).

Por otra parte, los términos (c) y (d) se proponen para cumplir con los requerimientos 6 y 7. Estos buscan minimizar la suma de las distancias asociadas en cada nodo de la red equivalente. Para ello se definen r_1 y r_2 a partir de las restricciones presentadas en (3.11).

Finalmente, el término (e) permite minimizar el error en el costo total del despacho.

Como estas características están incorporadas en la función objetivo, dependiendo de los valores otorgados a α_1 , α_2 , β_1 , β_2 y γ se priorizará un término sobre otro. Una de las condiciones para que el modelo tenga solución es que dichos parámetros deben ser siempre positivos.

Notando que los términos (a) y (e) del modelo no son lineales, se propone la linealización de ambos términos mediante la utilización de variables auxiliares y la definición del valor absoluto. Para el error puntual del despacho en cada generador la linealización se presenta a través de la equivalencia (3.16).

$$\begin{aligned} \min \alpha_1 \sum_{g \in G} |P_g^* - \tilde{P}_g| &\iff \min \alpha_1 \sum_{g \in G} P_g^{aux} \\ s.a. \quad -P_g^{aux} &\leq P_g^* - \tilde{P}_g \quad \forall g \in G \\ P_g^{aux} &\geq P_g^* - \tilde{P}_g \quad \forall g \in G \\ P_g^{aux} &\geq 0 \quad \forall g \in G \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otra parte, la linealización para el término (e) asociado al error en el costo total del despacho, se presenta en la ecuación (3.17).

$$\begin{aligned} \min \gamma \left| \sum_{g \in G} C_g(P_g^*) - \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_g) \right| &\iff \min \gamma C^{aux} \\ s.a. \quad -C^{aux} &\leq \sum_{g \in G} C_g(P_g^*) - \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_g) \\ C^{aux} &\geq \sum_{g \in G} C_g(P_g^*) - \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_g) \\ C^{aux} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.5.2. Restricciones de despacho económico

Las restricciones (3.3) corresponden a aquellas que describen el despacho económico en la red equivalente, para cumplir con el requerimiento número 2.

Es posible notar que estas son muy similares a las propuestas para el modelo de despacho en (3.1); sin embargo, existe una diferencia en la restricción de flujo DC que se explica a continuación.

Considerando que la red equivalente que busca otorgar el modelo es ficticia, no es posible conocer las características de las líneas de esta, es decir, reactancia, capacidad máxima, etc. Si bien estas características podrían ser directamente variables de optimización del modelo, esto produce restricciones no lineales que complejizan la optimización. Por lo tanto, se recurre al uso de valores fijos y holguras que permiten estimar estas características.

Para calcular el flujo DC asociado, en el nuevo modelo se realiza una estimación de la reactancia de la línea que se traduce en una variación de flujo. En primer lugar, se define que la reactancia de una línea $e \in \tilde{L}$ está dada por $\tilde{X}_e = \tilde{X} + \Delta\tilde{X}_e$, tal que $\tilde{X}_e \in [X^{min}, X^{max}]$, donde X^{min} y X^{max} representan el valor mínimo y máximo de las reactancias de la red inicial. Al definir de esta forma la reactancia de línea, se entrega una holgura al modelo que permite describir una red equivalente cuyas características son concordantes con la red inicial, contribuyendo a cumplir el requerimiento 5.

A partir de lo anterior, es posible describir el flujo de una línea mediante la expresión (3.18). Dado que esto se tiene para cualquier sistema eléctrico, se omiten los subíndices y tildes de los parámetros y variables. En la expresión, X es un valor fijo dado y ΔX una variable de holgura.

$$F = \frac{\Delta\theta}{X + \Delta X} \quad (3.18)$$

Luego, entendiendo que una diferencia en la reactancia de una línea se traduce en una diferencia en el flujo de la misma, se propone expresar el flujo mediante la expresión presentada en (3.19). A partir de esta se puede describir la relación entre ΔF y ΔX presentada en (3.20).

$$F = \frac{\Delta\theta}{X} + \Delta F \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow \Delta F = -\frac{\Delta\theta \cdot \Delta X}{X \cdot (X + \Delta X)} \quad (3.20)$$

Ahora bien, si se considera ΔF como una variable de optimización, esta se puede acotar mediante su relación con ΔX , es decir, $X + \Delta X \in [X^{min}, X^{max}]$. Luego, si $\Delta X \geq 0$, se tienen las expresiones propuestas en (3.21).

$$\begin{aligned} X^{min} &\leq X + \Delta X \leq X^{max} & / X \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta X}{X \cdot X^{min}} &\geq \frac{\Delta X}{X \cdot (X + \Delta X)} \geq \frac{\Delta X}{X \cdot X^{max}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En consecuencia, al acotar ΔX tal que $\Delta X \in [\Delta X^{min}, \Delta X^{max}]$, se obtiene lo propuesto en (3.22).

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} &\geq \frac{\Delta X}{X \cdot (X + \Delta X)} \geq \frac{\Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \\ \Rightarrow \frac{|\Delta\theta| \cdot \Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} &\leq |\Delta F| \leq \frac{|\Delta\theta| \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Luego, si $\Delta\theta \geq 0$, se puede obtener una cota inferior y superior para ΔF propuesta en (3.23). Análogamente, para $\Delta\theta \leq 0$, se tienen las cotas propuestas en (3.24).

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \leq \frac{\Delta X}{X \cdot (X + \Delta X)} \leq \frac{\Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \quad / \cdot \Delta \theta \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \leq \Delta F \leq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \leq \frac{\Delta X}{X \cdot (X + \Delta X)} \leq \frac{\Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \quad / \cdot \Delta \theta \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \leq \Delta F \leq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con esto, al definir $w^\theta \in \{0, 1\}$ una variable binaria que indique el signo de $\Delta \theta$, se pueden definir las restricciones propuestas en (3.25) que contribuyen a describir el flujo DC del sistema a partir de cotas coherentes con las características del sistema original.

$$\begin{aligned} \Delta F & \geq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \cdot w^\theta - \frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \cdot (1 - w^\theta) \\ \Delta F & \leq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \cdot (1 - w^\theta) - \frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{min}}{X \cdot X^{max}} \cdot w^\theta \\ & \Delta \theta \cdot w^\theta \geq 0 \\ & \Delta \theta \cdot (1 - w^\theta) \leq 0 \\ & w^\theta \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Lo anterior se basa en que $\Delta X \geq 0$, y para ello se debe fijar $X \leq X^{min}$. Tomando $X = X^{min}$, se tiene $\Delta X \in [0, X^{max} - X^{min}]$, y las restricciones (3.25) se traducen en las propuestas en (3.26).

$$\begin{aligned} \Delta F & \geq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \cdot w^\theta \\ \Delta F & \leq -\frac{\Delta \theta \cdot \Delta X^{max}}{X \cdot X^{min}} \cdot (1 - w^\theta) \\ & \Delta \theta \cdot w^\theta \geq 0 \\ & \Delta \theta \cdot (1 - w^\theta) \leq 0 \\ & w^\theta \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si se fija $X > X^{min}$, ΔX puede ser tanto negativo como positivo y las restricciones anteriores no se cumplen. Como ΔF es variable de optimización acotada inferior y superiormente, el valor referencial de X pierde relevancia y por tanto, no es problemático tomar el mínimo.

Finalmente, el conjunto completo de las restricciones asociadas al flujo DC es el que se describe en (3.6), con los parámetros predefinidos de acuerdo a lo propuesto en (3.27).

$$\begin{aligned} \tilde{X} & = X^{min} \\ X^{min} & = \min_{l \in L} X_l \\ X^{max} & = \max_{l \in L} X_l \\ \Delta X^{min} & = 0 \\ \Delta X^{max} & = X^{max} - X^{min} \\ \Delta \tilde{X}^{min} & = \frac{\Delta X^{min}}{\tilde{X} \cdot X^{max}} \\ \Delta \tilde{X}^{max} & = \frac{\Delta X^{max}}{\tilde{X} \cdot X^{min}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cabe destacar que el valor de la reactancia de línea para la red equivalente no se encuentra

explícito en el problema de optimización, y por lo tanto debe ser calculada a partir de los resultados del modelo de optimización.

3.5.3. Restricciones de asignación y unificación de recursos

Con el objetivo de no asignar más de una vez los recursos de generación y/o demanda que se encuentran en la red original, se plantea una restricción de asignación de recursos que plantea que cada recurso debe estar asignado a un solo nodo en la red equivalente.

Luego, se nota que lo anterior puede plantearse de forma equivalente mediante la proposición descrita en (3.28) para $g \in G$.

$$\exists! s \in \tilde{I} : y_{P_g,s} = 1 \iff \sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_g,s} = 1 \quad (3.28)$$

Análogamente, para $d \in D$, es posible definir las restricciones de asignación de recursos descritas en (3.4).

Por otra parte, considerando que los recursos de un mismo nodo no se pueden dividir en dos o más nodos de la red equivalente, se plantean restricciones de unificación de recursos. Esto se traduce a que, si dos o más recursos se encuentran en el mismo nodo en la red inicial, deben asignarse al mismo nodo en la red equivalente.

Para construir tal restricción se considera $i \in I$ un nodo de la red inicial, $g \in G$ un generador dado y $d \in D$ una demanda dada. Es posible notar que si ambos recursos se encuentran en el nodo i , se tiene $x_{P_g,i} \cdot x_{D_d,i} = 1$; en caso contrario, $x_{P_g,i} \cdot x_{D_d,i} = 0$.

Luego, para que ambos recursos se mantengan juntos, es necesario que exista algún nodo $s \in \tilde{I}$ en donde se asignen los dos, lo cual se puede plantear mediante las expresiones propuestas en (3.29).

$$\exists s \in \tilde{I} : y_{P_g,s} \cdot y_{D_d,s} = 1 \iff \sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_g,s} \cdot y_{D_d,s} \geq 1 \quad (3.29)$$

Para el caso en que ambos recursos se encuentren en nodos distintos de la red inicial, no es necesario imponer ninguna restricción sobre el modelo. Por lo tanto, a partir de lo anterior se plantea la restricción de unificación de recursos para cada par de generador y demanda de acuerdo a la ecuación (3.30).

$$x_{P_g,i} \cdot x_{D_d,i} \leq \sum_{s \in \tilde{I}} y_{P_g,s} \cdot y_{D_d,s} \quad \forall i \in I, \forall g \in G, \forall d \in D \quad (3.30)$$

Análogamente, para pares de generadores o de demandas, se concluyen las restricciones de unificación de recursos presentadas en (3.5).

Las restricciones descritas en (3.5) solo indican cómo se distribuyen los recursos de generación y demanda. Sin embargo, es necesario identificar la asignación de todos los nodos y no solo aquellos con generación y/o demanda. Para ello, se considera la variable de optimización $z_{i,s} \in \{0, 1\}$ que indica si el nodo $i \in I$ se asigna al nodo $s \in \tilde{I}$, o no.

Para los nodos que cuentan con algún tipo de recurso (generación o demanda), es posible definir una restricción que permite conectar las variables de asignación de generación y demanda con la de nodos.

Se tiene que un generador $g \in G$ perteneciente al nodo $i \in I$ de la red original, se encuentra asignado al nodo $s \in \tilde{I}$ de la red equivalente si y solo si $x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} = 1$. Luego, de forma análoga, para una demanda $d \in D$ perteneciente al nodo i , esta se encuentra asignada a s si se tiene $x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} = 1$.

A partir de lo anterior, el nodo $i \in I$ se asocia al nodo $s \in \tilde{I}$ si la expresión propuesta en (3.31) es verdadera, la cual es equivalente a la ecuación (3.32).

$$\exists g \in G \vee \exists d \in D : x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} = 1 \vee x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} = 1 \quad (3.31)$$

$$\sum_{g \in G} x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} + \sum_{d \in D} x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} \geq 1 \quad (3.32)$$

De esta forma, la restricción (3.7) describe la relación entre la asignación de recursos y la de nodos.

Por otra parte, para ser consistente con la asignación, se propone que cada nodo de la red inicial debe ser asignado a un único nodo de la red equivalente. Dado un nodo $i \in I$, la proposición (3.33) describe lo anterior.

$$\exists! s \in \tilde{I} : z_{i,s} = 1 \iff \sum_{s \in \tilde{I}} z_{i,s} = 1 \quad (3.33)$$

Considerando que esto se debe cumplir para todos los nodos definidos en la red inicial, se tiene la restricción (3.8) del modelo.

Similarmente, se propone que todos los nodos de la red equivalente tengan asignado al menos un nodo de la red original. De esta forma, la red equivalente siempre tendrá la cantidad de nodos designada por quien diseña la red equivalente.

Si bien la cantidad de nodos de la red equivalente podría ser también una variable de optimización, la utilización de un número fijo permite explorar por separado distintas estructuras de red.

Así, a partir de un análisis similar al realizado previamente, para un nodo $s \in \tilde{I}$ la expresión (3.34) representa lo deseado, y se traduce en la restricción (3.9) del modelo de optimización.

$$\exists i \in \tilde{I} : z_{i,s} = 1 \iff \sum_{i \in I} z_{i,s} \geq 1 \quad (3.34)$$

Es posible notar que a partir de la expresión (3.32) solo se define parte de la variable $z_{i,s}$. Luego, se propone utilizar el método *Big M* para describir esta variable mediante inecuaciones y variables auxiliares, como se presenta en (3.35).

$$\begin{aligned}
z_{i,s} &= \begin{cases} 1 & \sum_{g \in G} x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} + \sum_{d \in D} x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} \geq 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
&\iff \\
\tilde{z}_{i,s} &= \sum_{g \in G} x_{P_{g,i}} \cdot y_{P_{g,s}} + \sum_{d \in D} x_{D_{d,i}} \cdot y_{D_{d,s}} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
z_{i,s} &\leq \tilde{z}_{i,s} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
z_{i,s} &\leq 1 \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
z_{i,s} &\geq \tilde{z}_{i,s} - M_z(1 - u_{i,j}) \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
z_{i,s} &\geq 1 - M_z u_{i,s} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I} \\
u_{i,s} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in I', \quad \forall s \in \tilde{I}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.5.4. Restricciones de capacidad máxima

Como se describe anteriormente, la capacidad máxima de la línea también corresponde a una variable de optimización. Al igual que la reactancia, se busca que esta característica definida para la red equivalente sea coherente con la red inicial. De esta forma, se definen restricciones que permiten acotar estas variables a valores razonables para cumplir con 5.

Al considerar una línea $l = (i, j) \in L$, esta puede quedar contenida dentro de un nodo equivalente, o bien, cruzar dos nodos equivalentes. El primer caso ocurre cuando $i, j \in I$ son ambos asignados al mismo nodo $s \in \tilde{I}$, mientras que el segundo ocurre si son asignados a nodos $s, r \in \tilde{I}$ distintos, lo cual puede ser representado por la expresión $z_{i,s} \cdot z_{j,r} = 1$.

Cuando ambos nodos i, j se asignan a nodos equivalentes distintos s, r , se tiene que la siguiente proposición descrita para la línea $l = (i, j)$, $z_{i,s} \cdot z_{j,r} \cdot start_{l,i} \cdot end_{l,j} = 1$, es verdadera. Luego, es posible identificar todas las líneas de la red original que conectan a los nodos s, r en la red equivalente mediante el conjunto definido en (3.36).

$$\begin{aligned}
L_{s,r} &= \{l = (i, j) \in L : z_{i,s} \cdot z_{j,r} \cdot start_{l,i} \cdot end_{l,j} = 1 \\
&\quad \vee z_{i,s} \cdot z_{j,r} \cdot start_{l,j} \cdot end_{l,i} = 1\}_{i,j \in I}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

A partir de lo anterior, se propone que la capacidad máxima de la línea equivalente entre los nodos s, r no puede superar a la suma de las capacidades máximas de las líneas que se encuentran en el conjunto $L_{s,r}$, es decir, aquellas que conectan ambos nodos. Esto se representa mediante la expresión propuesta en (3.10a), donde $\tilde{F}_{s,r}^{max}$ permite definir la capacidad de la línea $e = (s, r) \in \tilde{L}$ a través de la expresión (3.10b).

Así, el conjunto de ecuaciones (3.10) describen las restricciones asociadas al flujo máximo de la nueva línea para que este no supere la suma de las líneas de borde entre los nodos que se unen.

3.5.5. Restricciones de conexidad

Con el objetivo de que la asignación de los nodos a la red equivalente sea coherente con la distribución espacial y la conexión real entre nodos y líneas, se plantea un conjunto de restricciones que propone que todos los nodos de la red inicial asignados a un mismo nodo en la red equivalente deben ser conexos entre sí. De esta forma, se cumple con el requisito 6.

Ahora, considerando $C(i, j)$ el conjunto de separadores mínimos entre $i \in I$ y $j \in I$ (Anexo A), es posible describir un conjunto de restricciones que imponen conexidad sobre los subgrafos inducidos en cada $s \in \tilde{I}$.

Sean $i, j \in I$ dos nodos de la red inicial, y $s \in \tilde{I}$ un nodo de la red equivalente. Si ambos nodos i, j están asignados a s , se tiene $z_{i,s} \cdot z_{j,s} = 1$; en caso contrario, $z_{i,s} \cdot z_{j,s} = 0$.

Luego, se requiere que estos no estén en componentes conexas en el subgrafo inducido en el nodo s . Es decir, al considerar S un (i, j) -separador mínimo (Anexo A), debe existir al menos un elemento en este conjunto que también se encuentre asignado al nodo s . Lo anterior se representa a través de la proposición (3.37), y se traduce en la restricción (3.38).

$$z_{i,s} \cdot z_{j,s} = 1 \iff \exists k \in S : z_{k,s} = 1 \quad (3.37)$$

$$z_{i,s} \cdot z_{j,s} \leq \sum_{k \in S} z_{k,s} \quad (3.38)$$

Ahora, considerando que esto se debe cumplir para cada par de nodos $(i, j) \in I \times I$, para cada nodo $s \in \tilde{I}$ y cada (i, j) -separador mínimo, se tiene la restricción (3.12) propuesta en el modelo.

3.6. Modelos con dimensión temporal

Los modelos presentados anteriormente para el despacho económico y la reducción de nodos están descritos para un único período de tiempo. Sin embargo, la extensión a múltiples períodos es natural.

Considerando que la estructura de la red es fija para cualquier período de tiempo, entonces solo es necesario extender las variables asociadas al despacho económico, para ello se les agrega el subíndice t a los parámetros y variables $D_d, F_l, \tilde{F}_e, P_g, \tilde{P}_g, w_e^\theta, \Delta \tilde{F}_e, \theta_i, \tilde{\theta}_s$.

3.6.1. Despacho económico para múltiples períodos de tiempo

El modelo de optimización del despacho económico para múltiples períodos de tiempo se presenta en (3.39) continuación, donde se explicitan solo las variables y restricciones afectadas por la dimensión temporal.

$$\begin{aligned}
& \min_{P,F,\theta} && \sum_{t \in T} \sum_{g \in G} C_g(P_{g,t}) \\
& \text{s.a.} && \sum_{g \in G} P_{g,t} \cdot x_{P_{g,i}} = \sum_{d \in D} D_{d,t} \cdot x_{D_{d,i}} + \sum_{l \in L} F_{l,t} \cdot \text{start}_{l,i} \\
& && - \sum_{l \in L} F_{l,t} \cdot \text{end}_{l,i} \quad \forall i \in I, \quad t \in T \\
& && F_{l,t} = \frac{\theta_{i,t} - \theta_{j,t}}{X_l} \quad \forall l = (i,j) \in L = I \times I, \quad t \in T \\
& && P_{g,t} \leq P_g^{\max} \quad \forall g \in G, \quad t \in T \\
& && P_{g,t} \geq P_g^{\min} \quad \forall g \in G, \quad t \in T \\
& && F_{l,t} \leq F_l^{\max} \quad \forall l \in L, \quad t \in T \\
& && F_{l,t} \geq -F_l^{\max} \quad \forall l \in L, \quad t \in T
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.6.2. Reducción de nodos para múltiples períodos de tiempo

El modelo de optimización de reducción de nodos para múltiples períodos de tiempo se ve alterado principalmente en la función objetivo y las restricciones asociadas al despacho económico. A continuación se presenta el modelo de optimización con las modificaciones respectivas.

$$\begin{aligned}
& \min_{\tilde{P}, \tilde{F}, \tilde{\theta}, y_P, y_D} && \alpha_1 \sum_{t \in T} \sum_{g \in G} |P_{g,t}^* - \tilde{P}_{g,t}| + \alpha_2 P_\varepsilon + \beta_1 \sum_{s \in \tilde{I}} r_{1_s} + \beta_2 \sum_{s \in \tilde{I}} r_{2_s} \\
& \text{s.a.} && + \gamma \left| \sum_{t \in T} \sum_{g \in G} C_g(P_{g,t}^*) - \sum_{t \in T} \sum_{g \in G} C_g(\tilde{P}_{g,t}) \right|
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.a.} && \sum_{g \in G} \tilde{P}_{g,t} \cdot y_{P_{g,i}} = \sum_{d \in D} D_{d,t} \cdot y_{D_{d,i}} + \sum_{l \in \tilde{L}} \tilde{F}_{l,t} \cdot \text{start}_{l,i} \\
& && - \sum_{l \in \tilde{L}} \tilde{F}_{l,t} \cdot \text{end}_{l,i} \quad \forall i \in \tilde{I}, \quad t \in T
\end{aligned} \tag{3.41a}$$

$$\tilde{F}_{l,t} = \frac{\tilde{\theta}_{i,t} - \tilde{\theta}_{j,t}}{\tilde{X}} + \Delta \tilde{F}_{l,t} \quad \forall l = (i,j) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}, \quad t \in T \tag{3.41b}$$

$$\tilde{P}_{g,t} \leq P_g^{\max} \quad \forall g \in G, \quad t \in T \tag{3.41c}$$

$$\tilde{P}_{g,t} \geq P_g^{\min} \quad \forall g \in G, \quad t \in T \tag{3.41d}$$

$$\tilde{F}_{l,t} \leq \tilde{F}_l^{\max} \quad \forall l \in \tilde{L}, \quad t \in T \tag{3.41e}$$

$$\tilde{F}_{l,t} \geq -\tilde{F}_l^{\max} \quad \forall l \in \tilde{L}, \quad t \in T \tag{3.41f}$$

$$\Delta \tilde{F}_{l,t} \geq -(\tilde{\theta}_{i,t} - \tilde{\theta}_{j,t}) \cdot \Delta \tilde{X}^{\max} \cdot w_{l,t}^\theta \quad \forall l = (i,j) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}, \quad t \in T \tag{3.42a}$$

$$\Delta \tilde{F}_{l,t} \leq -(\tilde{\theta}_{i,t} - \tilde{\theta}_{j,t}) \cdot \Delta \tilde{X}^{\max} \cdot (1 - w_{l,t}^\theta) \quad \forall l = (i,j) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}, \quad t \in T \tag{3.42b}$$

$$(\tilde{\theta}_{i,t} - \tilde{\theta}_{j,t}) \cdot w_{l,t}^\theta \geq 0 \quad \forall l = (i,j) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}, \quad t \in T \tag{3.42c}$$

$$(\tilde{\theta}_{i,t} - \tilde{\theta}_{j,t}) \cdot (1 - w_{l,t}^\theta) \leq 0 \quad \forall l = (i,j) \in \tilde{L} = \tilde{I} \times \tilde{I}, \quad t \in T \tag{3.42d}$$

Restricciones (3.4), (3.5), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12),(3.13)

$$y_{P,g,i} \in \{0, 1\} \quad \forall (g, i) \in G \times \tilde{I} \quad (3.43a)$$

$$y_{D,d,i} \in \{0, 1\} \quad \forall (d, i) \in D \times \tilde{I} \quad (3.43b)$$

$$w_{e,t}^\theta \in \{0, 1\} \quad \forall e \in \tilde{L}, \quad t \in T \quad (3.43c)$$

$$z_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in I \times \tilde{I} \quad (3.43d)$$

Capítulo 4

Casos de estudio

Los casos de estudio presentados buscan ilustrar y demostrar el comportamiento y las propiedades del modelo para distintas redes iniciales y números de nodos a reducir.

4.1. Red de 4 nodos

En primer lugar, se presenta una red eléctrica de 4 nodos, con 3 generadores y 2 demandas. La figura 4.1 describe el diagrama de la red, donde es posible notar la asignación de cada generador y demanda.

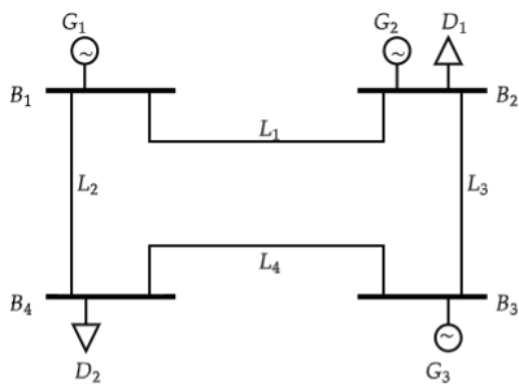


Figura 4.1: Diagrama red de 4 nodos.

Para esta red se consideran los parámetros de generación presentados en la tabla 4.1 y los de línea en 4.2. Estas características son comunes a dos configuraciones de demanda que permiten describir despachos con una y dos congestiones en las líneas.

Tabla 4.1: Características de generación, red 4 nodos.

Generador	Barra	Potencia mínima [MW]	Potencia máxima [MW]	Costo [\$/MWh]
G_1	1	0	160	5
G_2	2	0	160	10
G_3	3	0	1000	15

Tabla 4.2: Características de líneas, red 4 nodos.

Línea	Barras	Reactancia [p.u.]	Capacidad máxima [MW]
L_1	1-2	0.001	100
L_2	1-4	0.200	100
L_3	2-3	0.050	50
L_4	4-3	0.050	100

Los valores de demanda se describen en la tabla 4.3, donde la columna Potencia 1 corresponde a la primera configuración y la columna Potencia 2 a la segunda. La primera configuración permite obtener un despacho económico con 1 línea congestionada, mientras que la segunda un despacho con 2 líneas congestionadas.

Tabla 4.3: Demanda sistema 4 barras.

Demanda	Barra	Potencia 1 [MW]	Potencia 2 [MW]
D_1	2	140	200
D_2	4	50	100

4.2. Modelo WSCC 9 barras

Se utiliza el modelo de 9 barras WSCC que representa una aproximación simple del *Western System Coordinating Council*. Este sistema consta de 9 nodos y 3 generadores y demandas. La figura 4.2 presenta el diagrama de red del modelo original.

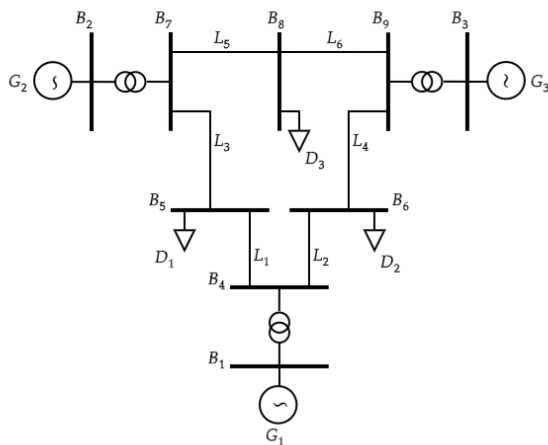


Figura 4.2: Diagrama red WSCC 9 bus.

Considerando que los transformadores solo están conectados a los generadores, se realiza una modificación al modelo de 9 nodos conectando directamente los generadores a las respectivas barras de su transformador asociado. El diagrama de red que describe lo anterior se presenta en la figura 4.3.

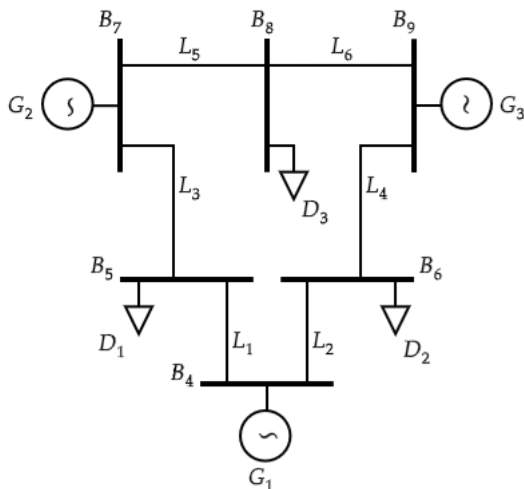


Figura 4.3: Diagrama red WSCC 9 bus, modificación a 6 nodos.

Las características de esta red se basan en las presentadas en [41]. Sin embargo, son ajustadas para obtener despachos que congestionen al menos una línea. Además, cabe destacar que la ubicación geográfica en este caso se extrapola a un plano cartesiano.

La tabla 4.4 describe la ubicación geográfica en coordenadas cartesianas de cada barra, mientras que las tablas 4.5 y 4.6 describen las características de los generadores y líneas, respectivamente.

Tabla 4.4: Características de barras, red WSCC 9 barras.

Barra	N°	Coordenada X	Coordenada Y
Bus 4	4	0	0
Bus 5	5	-1	1
Bus 6	6	1	1
Bus 7	7	-1	2
Bus 8	8	2	0
Bus 9	9	1	2

Tabla 4.5: Características de generación, red WSCC 9 barras.

Generador	Barra	Potencia	Potencia	Costo
		mínima [MW]	máxima [MW]	[\$/MWh]
G_1	4	0	300	5
G_2	5	0	300	10
G_3	6	0	300	15

Tabla 4.6: Características de líneas, red WSCC 9 barras.

Línea	Barras	Reactancia	Capacidad
		[p.u.]	máxima [MW]
L_1	4-5	0.0850	90
L_2	4-6	0.0920	70
L_3	5-7	0.1610	50
L_4	6-9	0.1700	70
L_5	7-8	0.0720	70
L_6	8-9	0.1008	50

Los valores de demanda se describen en la tabla 4.7, donde la columna Día representa una configuración de demanda, mientras que la columna Noche representa otra.

Tabla 4.7: Demanda sistema WSCC 9 barras.

Demanda	Barra	Día	Noche
		[MW]	[MW]
D_1	5	125	80
D_2	6	90	130
D_3	8	100	100

Adicionalmente, se configura un perfil de demanda de 24 horas de la forma en que se presenta en la tabla 4.8.

Tabla 4.8: Demanda de 24 horas, sistema WSCC 9 barras.

Hora	D_1 [MW]	D_2 [MW]	D_3 [MW]
1	80	130	100
2	80	130	100
3	80	130	100
4	80	130	100
5	80	130	100
6	80	130	100
7	125	90	100
8	125	90	100
9	125	90	100
10	125	90	100
11	125	90	100
12	125	90	100
13	125	90	100
14	125	90	100
15	125	90	100
16	125	90	100
17	125	90	100
18	125	90	100
19	125	90	100
20	125	90	100
21	80	130	100
22	80	130	100
23	80	130	100
24	80	130	100

4.3. Modelo IEEE 14 barras

Se utiliza el modelo de 14 barras de la IEEE que representa una aproximación del *American Electric Power System* en febrero de 1962. En este sistema hay 14 barras, con 5 centrales de generación y 11 centros de carga. El modelo y la distribución de generadores y cargas se presentan en la figura 4.4.

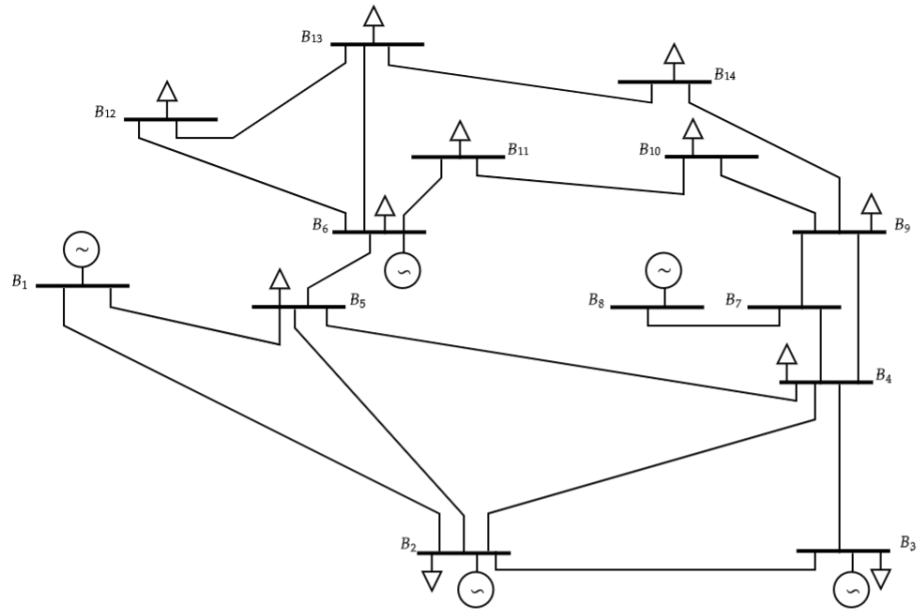


Figura 4.4: Diagrama red IEEE 14 barras.

La tabla 4.9 describe la ubicación geográfica en coordenadas cartesianas de cada barra. Estas coordenadas se basan en la ubicación geográfica descrita en [42]. Las tablas 4.10 y 4.11 describen las características de los generadores y líneas, respectivamente.

Tabla 4.9: Características de barras, red IEEE 14 barras.

Barra	Nº	Coordenada X	Coordenada Y
Bus 1	1	40.784	-105.145
Bus 2	2	39.065	-105.793
Bus 3	3	38.362	-107.034
Bus 4	4	37.765	-105.200
Bus 5	5	40.316	-103.299
Bus 6	6	36.812	-102.156
Bus 7	7	36.865	-106.617
Bus 8	8	36.389	-108.529
Bus 9	9	36.689	-105.518
Bus 10	10	35.999	-105.551
Bus 11	11	36.575	-101.278
Bus 12	12	36.610	-103.013
Bus 13	13	35.999	-102.376
Bus 14	14	36.061	-104.738

Tabla 4.10: Características de generación, red IEEE 14 barras.

Generador	Barra	Potencia mínima [MW]	Potencia máxima [MW]	Costo [\$/MWh]
G_1	1	0	100	5
G_2	2	0	100	10
G_3	3	0	100	15
G_4	6	0	100	20
G_5	8	0	100	25

Tabla 4.11: Características de líneas, red IEEE 14 barras.

Línea	Barras	Reactancia [p.u.]	Capacidad máxima [MW]
L_1	1-2	0.05917	200
L_2	1-5	0.22304	40
L_3	2-3	0.19797	40
L_4	2-4	0.17632	10
L_5	2-5	0.17388	40
L_6	3-4	0.17103	40
L_7	4-5	0.04211	40
L_8	4-7	0.20912	40
L_9	4-9	0.55618	40
L_{10}	5-6	0.25202	30
L_{11}	6-11	0.1989	30
L_{12}	6-12	0.25581	30
L_{13}	6-13	0.13027	30
L_{14}	7-8	0.17615	40
L_{15}	7-9	0.11001	40
L_{16}	9-10	0.0845	40
L_{17}	9-14	0.27038	20
L_{18}	10-11	0.19207	20
L_{19}	12-13	0.19988	20
L_{20}	13-14	0.34802	40

Los valores de demanda se describen en la tabla 4.12.

Tabla 4.12: Demanda sistema IEEE 14 barras.

Demanda	Barra	Potencia [MW]
D_1	2	21.7
D_2	3	94.2
D_3	4	47.8
D_4	5	7.6
D_5	6	11.2
D_6	9	29.5
D_7	10	9.0
D_8	11	3.5
D_9	12	6.1
D_{10}	13	13.5
D_{11}	14	14.9

Capítulo 5

Resultados y análisis

En el presente capítulo se describen los resultados y análisis de la implementación del modelo de reducción nodal para los distintos casos de estudio presentados. La sección 5.1 presenta simulaciones sobre una red pequeña de 4 nodos, que permite describir las propiedades del modelo. Luego, la sección 5.2 describe los resultados de simulación sobre redes con un mayor número de nodos, como lo son la red WSCC 9 barras e IEEE 14 barras, y variaciones de distintos parámetros del modelo.

Para presentar los resultados se realizan simulaciones en un computador personal con procesador Intel Core i5-8265U (4 núcleos, 8 hilos, 1.60GHz base, hasta 3.90 GHz turbo) y 8.00 GB de RAM DDR4. El sistema operativo corresponde a Windows 11 Home (versión 24H2, 64.bit).

La implementación del modelo de reducción de nodos y sus respectivas etapas se realiza mediante los *software* Julia, versión 1.9.2, y Gurobi Optimizer, versión 12.0. Dadas las restricciones de *hardware*, las simulaciones se realizaron de forma secuencial sin aceleración por GPU.

Julia es un lenguaje de programación de código abierto diseñado para un alto rendimiento. Este lenguaje de programación es dinámico y de propósito general, por lo que puede ser utilizado para múltiples aplicaciones. Además, es de fácil integración con distintos entornos de programación y posee una gran cantidad de paquetes que favorecen su uso [43]. En particular, este *software* es ampliamente utilizado para la implementación de modelos de optimización, como lo es el modelo de reducción de nodos.

Por otra parte, Gurobi Optimizer, o simplemente Gurobi, es una plataforma de uso comercial basada en el paradigma de modelar y resolver. Esto es, un *solver* que, a través de la modelación de problemas en forma matemática, permite tomar decisiones mediante la teoría de la optimización [44]. Este *solver* es utilizado ampliamente para problemas de gran escala debido a su alta eficiencia y rapidez y, en particular, para programas lineales enteros mixtos. Adicionalmente, Gurobi puede ser integrado con distintos lenguajes de programación como Julia y Python. Cabe destacar que, si bien es una plataforma comercial, esta dispone de licencias académicas [45].

5.1. Ilustración del modelo

A continuación se presentan los resultados obtenidos para la red de 4 nodos presentada en la figura 4.1 con el objetivo de ilustrar las propiedades del modelo. Para ello se utiliza la red con las características ya presentadas y se describen dos despachos, donde uno de ellos genera congestión en una línea, mientras que el otro lo hace en dos líneas.

5.1.1. Demanda Potencia 1

En la figura 5.1 se ilustran los resultados del despacho económico sobre la red presentada en la figura 4.1 para la demanda Potencia 1. El despacho de potencia para cada generador se presenta en color celeste junto a su valor, mientras que la demanda en color morado. Los flujos de cada línea se presentan en color celeste o naranja, indicando su dirección mediante las flechas. Los flujos de color celeste corresponden a líneas que no se encuentran congestionadas, y las de color naranja son aquellas congestionadas en el despacho propuesto.

Es posible notar que solo se encuentra L_1 congestionada, y que además, dadas las características presentadas en la tabla 4.1, ningún generador se encuentra a potencia máxima.

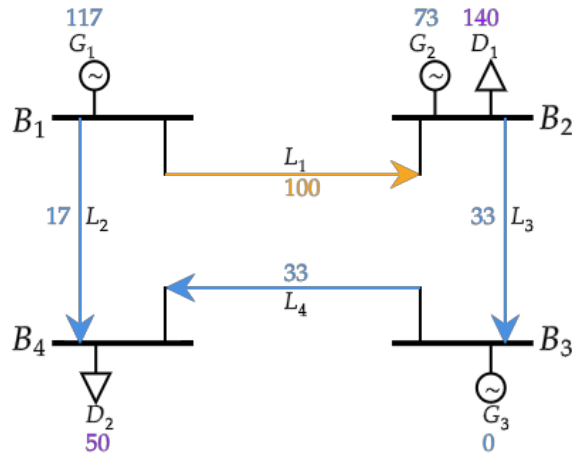


Figura 5.1: Despacho económico sobre red de 4 nodos, para demanda Potencia 1.

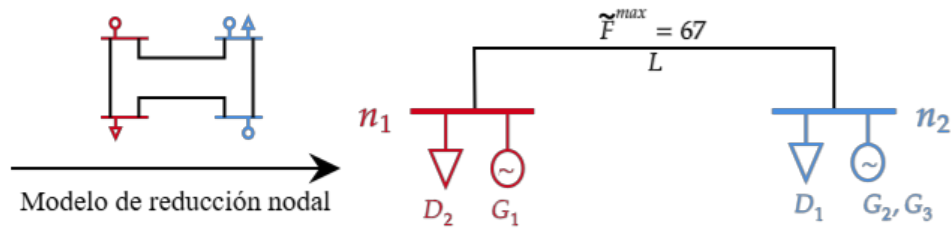
Los resultados de este despacho económico se utilizan sobre el modelo de optimización de reducción de nodos para encontrar una red equivalente de dos nodos y otra de tres. Para ello, se configura el modelo con los parámetros $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$, es decir, se enfoca en obtener una red equivalente que pueda replicar los resultados del despacho económico, pero no considera explícitamente el requerimiento 7.

En la figura 5.2 se ilustran los resultados del modelo de reducción de nodos sobre la red propuesta para la demanda Potencia 1 y una red equivalente de 2 nodos.

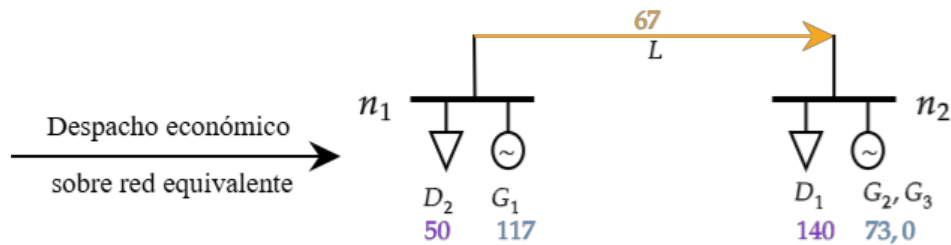
En primer lugar, es posible observar que la red equivalente cumple con los requisitos 3, 4,

5 y 6. Luego, al notar el despacho económico sobre la red equivalente², este es factible y se obtienen los mismos resultados que para el despacho inicial; de esta forma, se cumplen los requisitos 1 y 2.

El flujo máximo de la línea definido por el modelo es de 67 [MW]. Este flujo es consistente con las restricciones propuestas, donde, dadas las características de la red, este debería ser menor o igual a 200 [MW], que correspondería a la suma de la capacidad de las dos líneas que cruzan los nodos n_1 y n_2 .



(a) Red equivalente de 2 nodos.



(b) Despacho económico sobre red equivalente.

Figura 5.2: Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 2 nodos, para demanda Potencia 1.

En la figura 5.3 se presentan todas las asignaciones nodales alternativas a la red equivalente propuesta por el modelo. Es posible notar que para las asignaciones presentadas en 5.3.a y 5.3.b, el error de despacho es nulo, al igual que para la red equivalente, por lo cual estas opciones también son óptimas para el modelo. Sin embargo, cabe destacar que esto es posible por la limitación de la línea. Para las otras asignaciones (5.3.c, 5.3.d y 5.3.e) no es posible ajustar la capacidad de la línea de forma que el error de despacho disminuya a cero.

Tanto la asignación nodal como las características de las líneas son relevantes para poder replicar los resultados de potencia en el despacho económico.

² Estos resultados de despacho son obtenidos a partir de correr un despacho económico sobre la red equivalente y no corresponden a los resultados de despacho del modelo de reducción de nodos (Anexo B). Los resultados de despacho sobre todas las redes equivalentes presentadas a lo largo de este estudio se obtienen de esta forma.

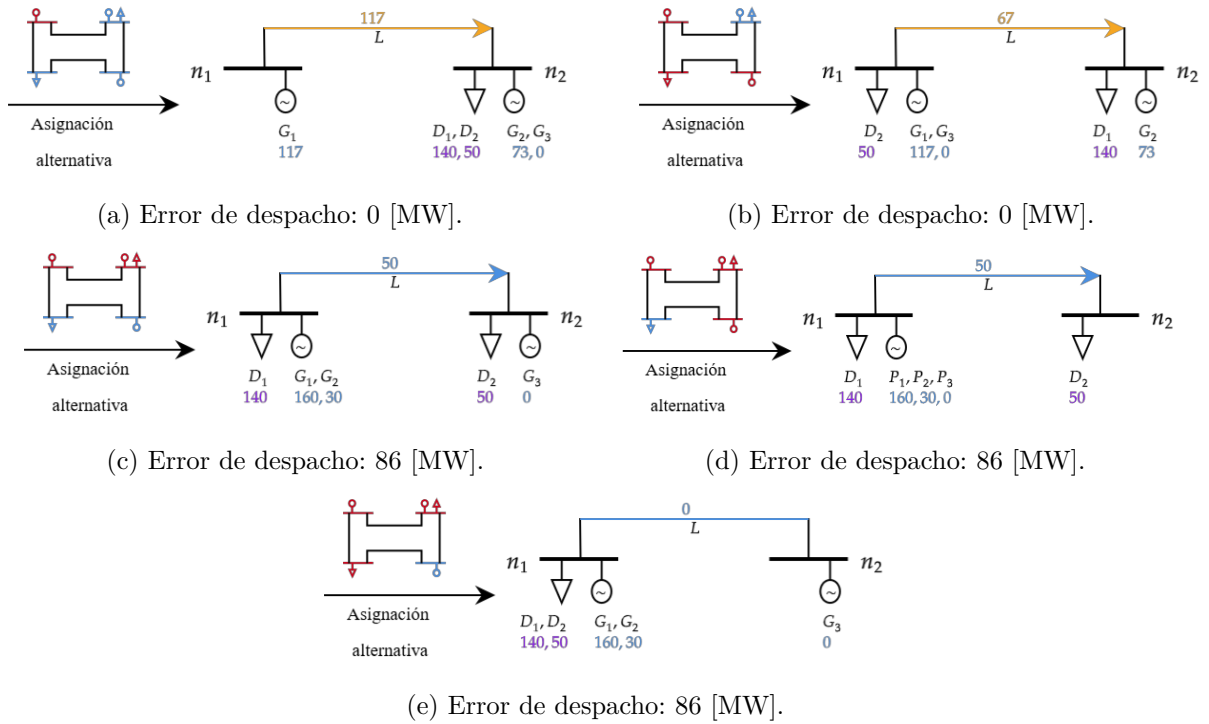
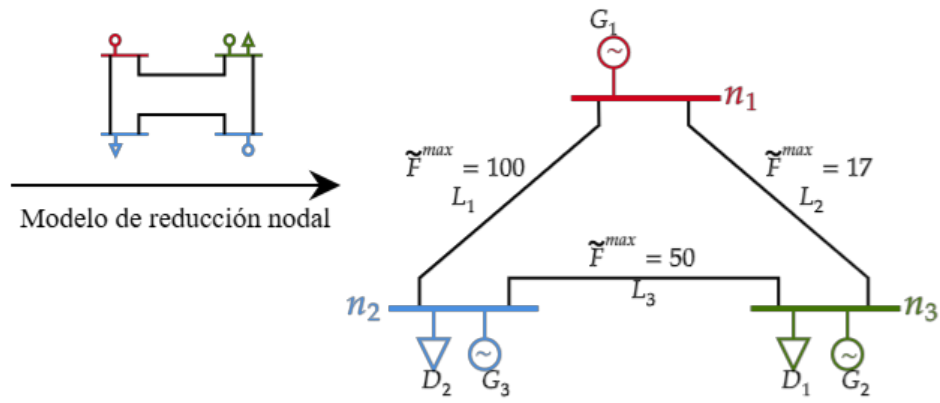


Figura 5.3: Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 2 nodos y sus respectivos errores de despacho.

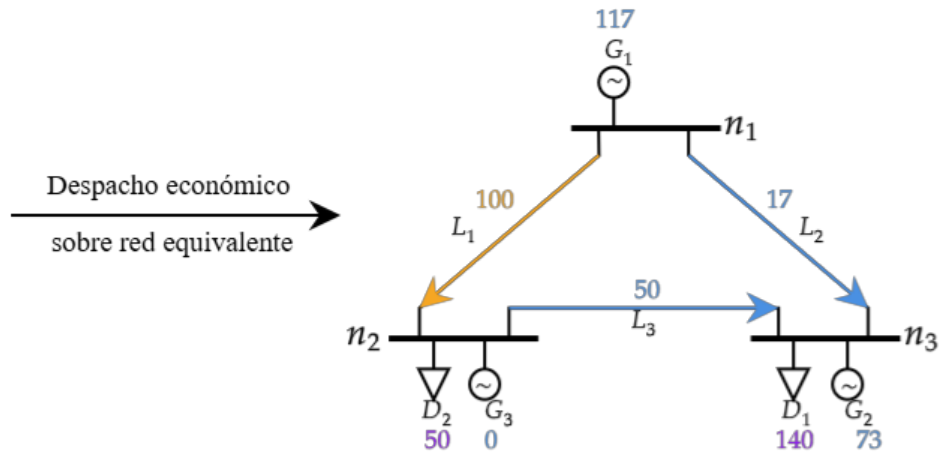
A partir de esta simulación se desprende que, efectivamente, el modelo es capaz de proponer una red equivalente que cumple con los requisitos y es óptima con respecto al error de despacho de potencia, y que esto lo realiza mediante la asignación de nodos y las características a definir de las líneas propuestas. Sin embargo, tal como se aprecia a partir de las asignaciones alternativas, es posible notar que esta asignación no necesariamente es única.

Al realizar la reducción de nodos para el mismo despacho presentado en la figura 5.1 para una red equivalente de 3 nodos, se obtienen los resultados propuestos en la figura 5.4, donde el error de despacho es de 0 [MW].

En este caso, es relevante destacar que, de acuerdo al modelo de despacho económico, solo la línea L_1 se encuentra congestionada (multiplicador de Lagrange asociado no nulo); las otras líneas igual están en su máximo técnico. Sin embargo, debido a la distribución de los recursos, en caso de que aumentara la demanda, esta podría satisfacerse con los generadores G_2 y G_3 . Además, cabe mencionar que para este caso también existe otra alternativa de asignación que es óptima (Anexo C.1).



(a) Red equivalente de 3 nodos.



(b) Despacho económico sobre red equivalente.

Figura 5.4: Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 3 nodos, para demanda Potencia 1.

5.1.2. Demanda Potencia 2

Los resultados del despacho económico sobre la red propuesta en la figura 4.1 para la demanda Potencia 2 se ilustran en la figura 5.5. Se utiliza la misma nomenclatura y asignación de colores que la descrita en las secciones anteriores.

Es posible notar que para la demanda Potencia 2 el despacho presenta dos líneas congestionadas, L_1 y L_3 , y ninguno de sus generadores está generando a potencia máxima.

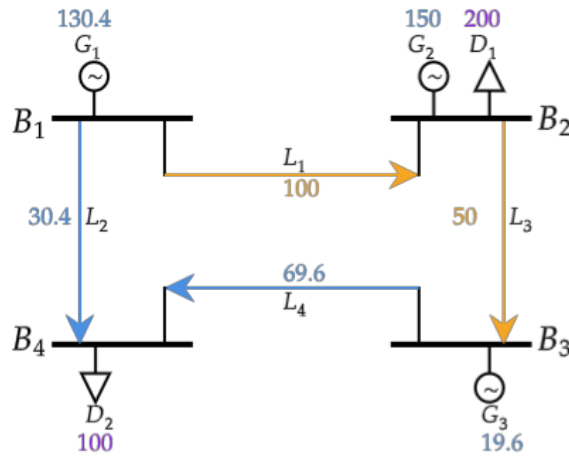


Figura 5.5: Despacho económico sobre red de 4 nodos, para demanda Potencia 2.

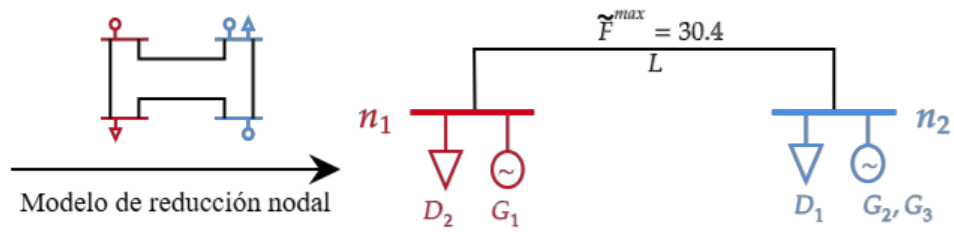
A partir de estos resultados, se utiliza el modelo de optimización de reducción de nodos para describir dos redes equivalentes. Los parámetros del modelo α_1 , α_2 , β_1 , β_2 y γ mantienen sus valores respecto a la configuración anterior, es decir, solo se encuentra activo α_1 .

La figura 5.6 presenta los resultados para una red equivalente de dos nodos, a partir de la demanda Potencia 2. Se destaca que la red equivalente propuesta en 5.6.a cumple con los requisitos 3, 4, 5, 6.

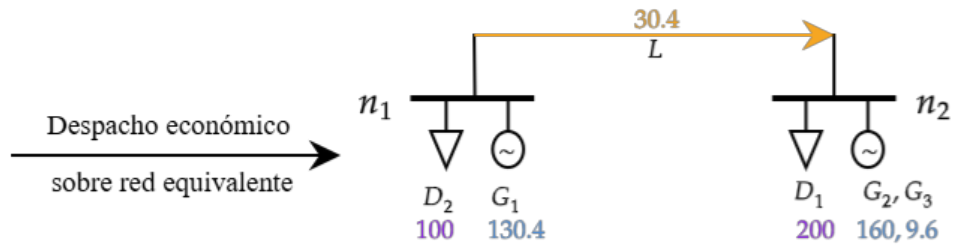
En el despacho sobre la red inicial, las potencias generadas por G_1 , G_2 Y G_3 son 130.4, 150 y 19.6 [MW], respectivamente, mientras que en la red equivalente son 130.4, 160 y 9.6 [MW]. De esta forma, existe un error de despacho de 20 [MW] debido a la diferencia de 10 [MW] en G_2 y G_3 .

Se puede observar que en el despacho presentado en la figura 5.6.b para la red equivalente de dos nodos, la línea se encuentra a capacidad máxima. Nuevamente, las características de la línea determinada por el modelo influyen altamente en el cumplimiento de los requerimientos, puesto que al modificar la capacidad de la línea, como esta se encuentra congestionada y G_1 no se encuentra en sus límites técnicos, entonces se vería directamente modificado su despacho.

Los resultados presentados dan cuenta del cumplimiento de los requerimientos propuestos. Sin embargo, existe un error en el despacho. Al comparar el despacho obtenido sobre la red equivalente con las otras asignaciones factibles presentadas en la figura 5.7, es posible observar que dicho error es el mínimo y solo se comparte con la asignación propuesta en la figura 5.7.a, por lo que se cumple el requerimiento 1.

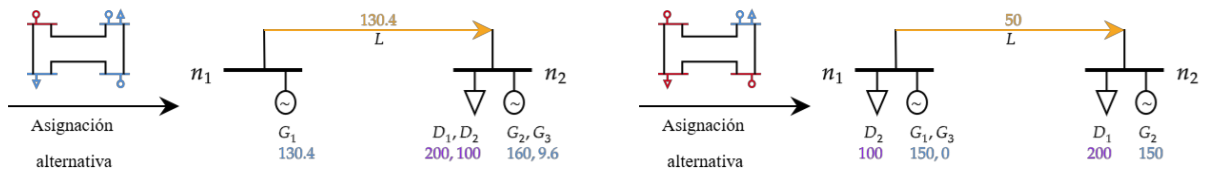


(a) Red equivalente de 2 nodos.



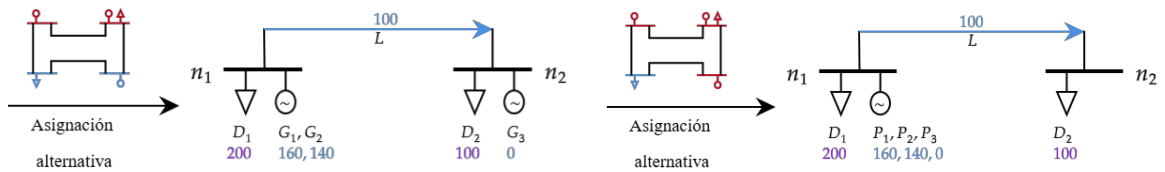
(b) Despacho económico sobre red equivalente.

Figura 5.6: Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 2 nodos, para demanda Potencia 2.



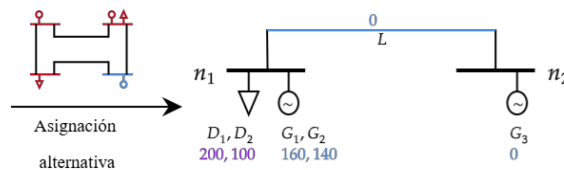
(a) Error de despacho: 20 [MW].

(b) Error de despacho: 39.2 [MW].



(c) Error de despacho: 59.2 [MW].

(d) Error de despacho: 59.2 [MW].



(e) Error de despacho: 59.2 [MW].

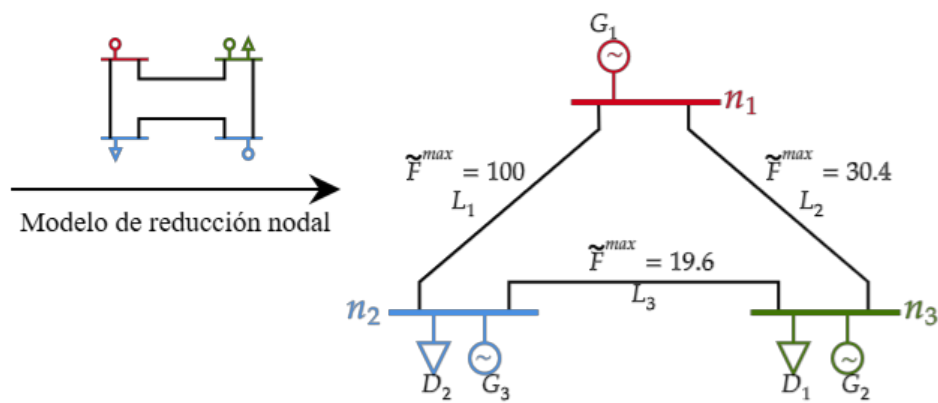
Figura 5.7: Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 2 nodos y sus respectivos errores de despacho.

Por otra parte, es relevante mencionar que para este caso, todas las asignaciones factibles

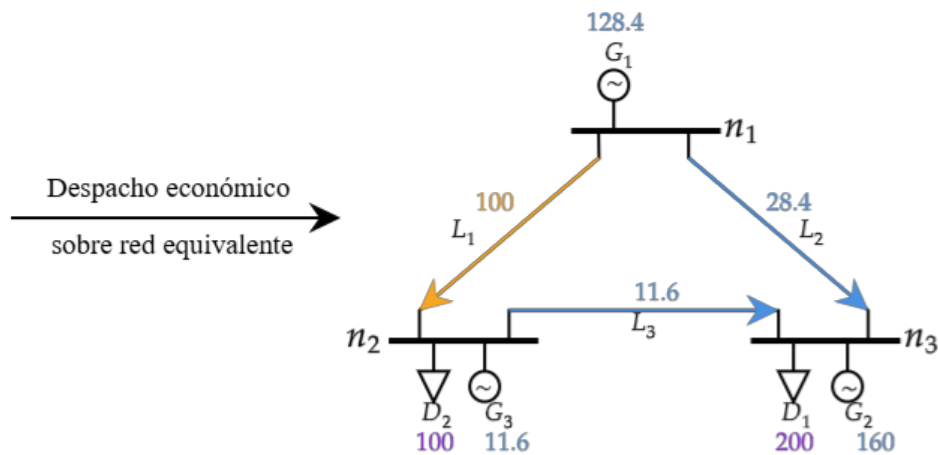
presentan error de despacho, a diferencia del caso con una congestión donde existen tres configuraciones que no presentan error de despacho. Para la demanda Potencia 1, las tres redes cuyo error de despacho es nulo son óptimas, mientras que para la demanda Potencia 2 solo hay dos redes equivalentes óptimas cuyo error de despacho es de 20 [MW].

La mayor cantidad de congestiones en el despacho asociado a la demanda Potencia 2 se traduce en mayores errores de despacho de la red equivalente que en el asociado a Potencia 1. Sin embargo, ambos casos comparten dos redes equivalentes óptimas.

La reducción de nodos para el despacho asociado a la demanda Potencia 2 para una red equivalente de 3 nodos se presenta en la figura 5.8, donde el error de despacho también es de 20 [MW].



(a) Red equivalente de 3 nodos.



(b) Despacho económico sobre red equivalente.

Figura 5.8: Resultados modelo de reducción de nodos sobre red de 4 nodos a 3 nodos, para demanda Potencia 2.

De forma intuitiva, se esperaría que el error de despacho disminuya al aumentar la cantidad de nodos de la red equivalente, puesto que al tener mayor cantidad de nodos se acerca

más a la red original. Sin embargo, en este caso no se presenta este fenómeno, puesto que, a pesar de que los máximos técnicos de las líneas se encuentran definidos para cumplir con el despacho original, la reactancia de línea no lo permite. Aun así, el error de despacho en este caso no es superior al de 2 nodos.

Cabe destacar que al reducir la red de tamaño disminuyen la cantidad de variables y restricciones asociadas al problema de despacho económico. Para la red de 4 nodos presentada, el problema de despacho económico consta de 11 variables y 22 restricciones. Al reducirla a 3 nodos, estas disminuyen a 9 variables y 18 restricciones, mientras que para la red equivalente de 2 nodos el modelo de despacho económico consta de 6 variables y 11 restricciones.

5.2. Análisis de sensibilidad

En la presente sección se describen los resultados obtenidos para los modelos WSCC 9 barras e IEEE 14 barras frente a variación en los parámetros de la modelación. En primera instancia se varía la cantidad de nodos definidos para la red equivalente, y posteriormente los valores de α_1 , α_2 , β_1 , β_2 y γ .

5.2.1. Modelo WSCC 9 barras

Para las siguientes simulaciones se utiliza el modelo descrito en la sección 4.2. En particular, se utiliza la demanda Día para todas las instancias, salvo la exploración del modelo temporal.

En la figura 5.9 se presentan los resultados del despacho económico sobre la red, donde los valores se encuentran aproximados a un decimal.

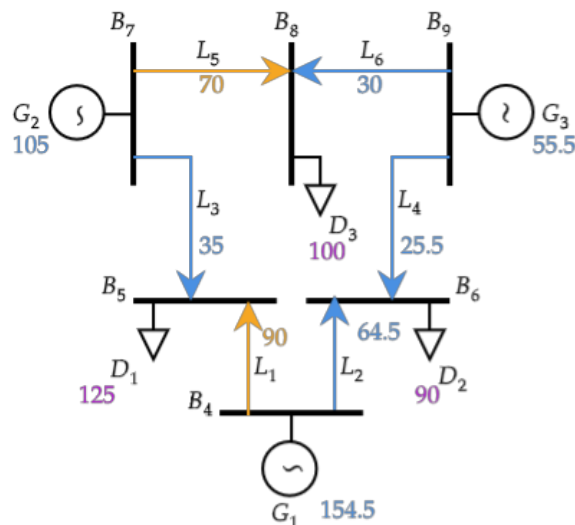


Figura 5.9: Despacho económico sobre red WSCC 9 barras, para demanda Día.

5.2.1.1. Variación en número de nodos de red equivalente

Para evaluar la respuesta del modelo frente a la cantidad de nodos de la red equivalente, se utilizan los parámetros fijos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$. Es decir, se considera únicamente el error de despacho punto a punto sobre el sistema.

Debido a que la red utilizada es de 6 nodos, se resuelve el modelo para redes equivalentes de 2 a 5 nodos. Los resultados se presentan en la tabla 5.1, donde todos los valores se encuentran aproximados a dos decimales.

Es posible notar que, a medida que aumenta la cantidad de nodos de la red equivalente, tanto el error en el despacho como en los costos totales del sistema disminuyen. Esto también se ve reflejado en los gráficos de la figura 5.10. Tanto el error de despacho como el de costos totales disminuyen drásticamente cuando se utiliza una red equivalente de 3 nodos versus una de 2 nodos. A partir de los 3 nodos se puede notar que la pendiente de la curva no es tan pronunciada, ya que la disminución del error tampoco lo es. Cabe destacar que el error de despacho llega a ser prácticamente nulo para la red equivalente de 5 nodos.

El error en los costos totales se considera como la diferencia entre el costo del despacho de la red original y el de la red equivalente; luego, los valores negativos para este indicador se pueden interpretar como una sobrestimación de los costos del sistema, mientras que los valores positivos corresponderían a una subestimación. En este caso, solo para la red equivalente de 5 nodos existe una sobrestimación de los costos totales del despacho.

Tabla 5.1: Resultados para variación de nodos de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

	WSCC	Red equivalente			
	9 barras	2 nodos	3 nodos	4 nodos	5 nodos
G_1 [MW]	154.47	300.0	160.0	154.37	154.45
G_2 [MW]	105.0	15.0	105.1	110.63	105.00
G_3 [MW]	55.53	0.0	49.90	50.0	55.56
Error despacho [MW]	–	291.07	11.26	11.26	0.04
Costo total despacho [\$]	2655.34	1650.0	2599.52	2628.14	2655.55
Error costo total [\$]	–	1005.34	55.82	27.20	-0.21

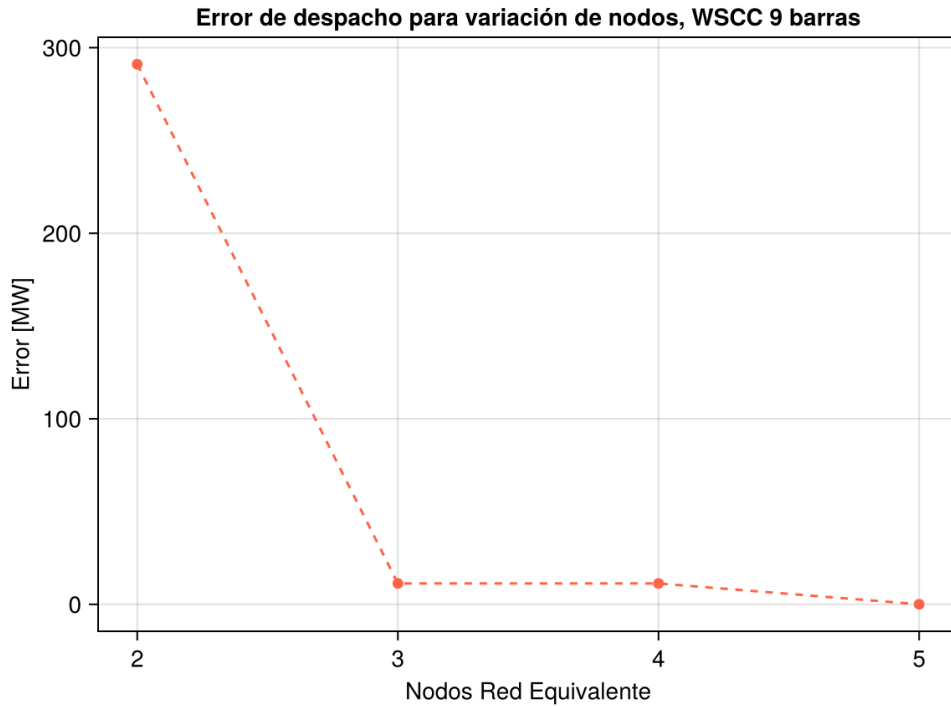


Figura 5.10: Error de despacho para variación de nodos de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

Cabe destacar que el problema de despacho económico multinodal con flujo DC para esta red consta de 15 variables continuas y 30 restricciones, mientras que el mismo problema para la red equivalente de 3 nodos estas disminuyen a 9 variables y 18 restricciones. Para obtener esta red equivalente el modelo de reducción nodal consta de 30 variables binarias, 39 variables continuas y 264 restricciones.

5.2.1.2. Exploración de parámetros

La función objetivo se compone de 5 términos asociados a los parámetros α_1 , α_2 , β_1 , β_2 y γ . A continuación se describen los resultados obtenidos al evaluar los distintos parámetros en la función objetivo. Para ello se describen distintas configuraciones de parámetros para entender el comportamiento del modelo frente a estos.

Se resuelve el modelo para una red equivalente de 3 nodos, donde el caso base describe la red equivalente al resolver el modelo con $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$. Los resultados del caso base corresponden a los de la tercera columna de la tabla 5.1, donde el error de despacho es de 11.26 [MW] y el error de costos totales es de 55.82 [\$]. La red equivalente obtenida para el caso base es la de menor error de despacho para esta cantidad de nodos.

Se evalúa la respuesta de todos los parámetros por sí solos, así como en conjunto con α_1 . Para ello, se consideran los casos descritos en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Casos para exploración de parámetros.

	Casos								
	Base	1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b
α_1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
α_2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
β_1	0	0	0	10	10	0	0	0	0
β_2	0	0	0	0	0	10	10	0	0
γ	0	0	0	0	0	0	0	1	1

En las tablas 5.3 y 5.4 se presentan los resultados de error de despacho, error máximo de despacho, la largo de camino mínimo acumulado, la distancia euclidiana acumulada y el error de costo total. Por otra parte, en la figura 5.11 se presentan los errores de despacho para los distintos casos.

Es posible notar que el error de despacho es mínimo para el caso base y tres casos más; los casos en que se pondera α_2 (1.a y 1.b), independiente de α_1 , y el caso que considera $\alpha_1 = 1$ y $\gamma = 1$ (4.a), dando cuenta de que la relación entre α_1 y α_2 podría ser irrelevante para el modelo en términos de redes equivalentes con mínimo error de despacho.

Por otra parte, se desprende que al considerar γ en conjunto con α_1 tampoco existen diferencias en los resultados. Sin embargo, al considerar solo el parámetro γ , el error de despacho aumenta, pero el error de costo disminuye a cero, siendo consistente con lo que se espera de este parámetro: minimizar el error en los costos del sistema.

En términos del error de despacho, se puede notar que al considerar en conjunto una ponderación entre el error de distancia y el error de despacho, como en los casos 2.a y 3.a, se obtienen peores resultados que al considerar solo el ponderador de distancia (2.b y 3.b) o solo el ponderador de despacho (Caso base). Al ajustar los ponderadores es posible disminuir el error de despacho en los casos 2.a y 3.a, pero no logra acercarse a valores como los presentados en el caso base.

A pesar de lo anterior, los ponderadores de largo de camino mínimo y euclidiana cumplen su propósito, donde se puede observar que para los casos 2.a y 2.b el largo de camino mínimo acumulado corresponde a 6, frente al caso base que es 10, mientras que para los casos 3.a y 3.b, la distancia euclidiana acumulada corresponde a 9.3 versus 18, que es la del caso base. Además, cabe destacar que para los casos 3.a y 3.b el largo de camino mínimo acumulada también es mínima.

Tabla 5.3: Resultados para exploración de parámetros, casos 1 y 2.

	Casos				
	Base	1.a	1.b	2.a	2.b
Error despacho [MW]	11.26	11.26	11.26	210	111.07
Error máximo despacho [MW]	5.63	5.63	5.63	105	55.53
Largo de camino mínimo ($\sum_{i \in \tilde{I}} r_{1,i}$)	10	10	10	6	6
Distancia euclidiana ($\sum_{i \in \tilde{I}} r_{2,i}$)	18	18	18	10	10
Error costo total [\$]	55.82	55.82	55.82	315.39	505.34

Tabla 5.4: Casos para exploración de parámetros, casos 3 y 4.

	Casos				
	Base	3.a	3.b	4.a	4.b
Error despacho [MW]	11.26	191.07	111.07	11.26	22.14
Error máximo despacho [MW]	5.63	95.53	55.53	5.63	11.07
Largo de camino mínimo ($\sum_{i \in \tilde{I}} r_{1,i}$)	10	6	6	10	10
Distancia euclidiana ($\sum_{i \in \tilde{I}} r_{2,i}$)	18	9.3	9.3	18	18
Error costo total [\$]	55.82	626.36	505.34	55.82	0

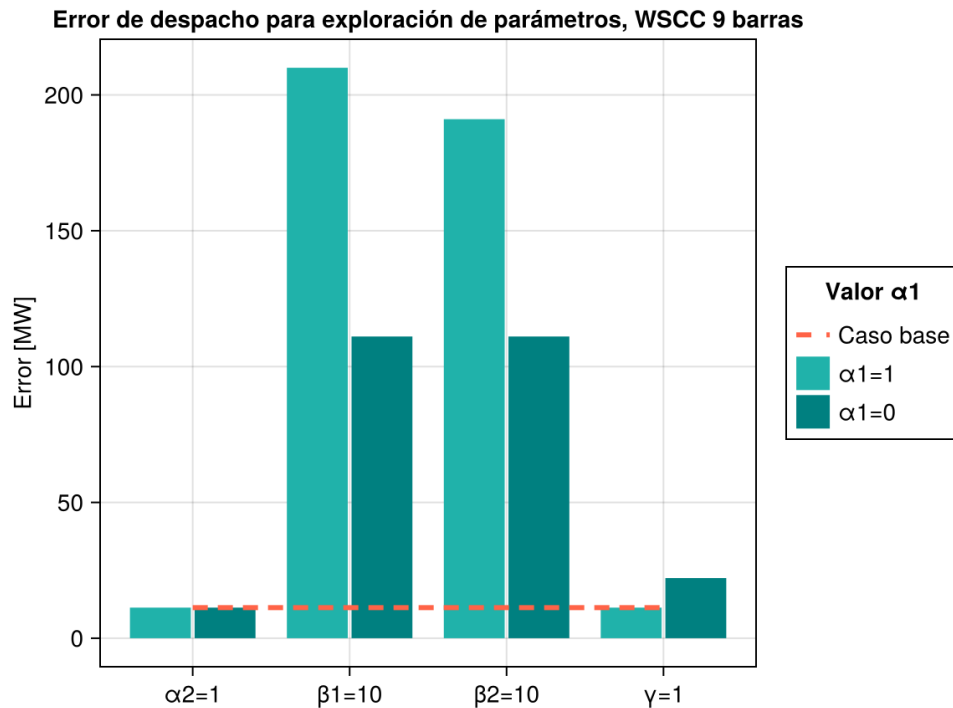


Figura 5.11: Error de despacho para exploración de parámetros, WSCC 9 barras, demanda Día.

Si bien los resultados anteriores solo representan un valor de los infinitos que pueden tomar los parámetros, permiten comprobar que estos sí cumplen el rol propuesto en el modelo, minimizando la característica asociada a cada parámetro, ya sean errores de despacho, costos o distancias.

5.2.1.3. Variación en ponderadores de despacho

En la presente sección se busca evaluar el comportamiento del modelo frente a la variación de los ponderadores de error de despacho, es decir, frente a la modificación de los parámetros α_1 y α_2 , donde el primero pondera el error de despacho absoluto punto a punto, mientras que el segundo lo hace para el error de despacho máximo.

Para las simulaciones se consideran como parámetros fijos la cantidad de nodos de la red equivalente $n = 3$ y el resto de ponderadores de la función objetivo $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$. Además, se propone una relación convexa entre los errores de despacho, es decir, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ con α_1 recorriendo los valores de 0 a 1, a un paso de 0.25.

En la figura 5.12 es posible notar que, independiente de los valores de α_1 y α_2 , el error de despacho es siempre el mismo. Este fenómeno se repite para redes equivalentes de más y menos nodos y para otras demandas (ver Anexo D). A partir de esto, se comprueba que la relación entre α_1 y α_2 no es relevante para determinar la red equivalente, mientras ponderen dentro de la función objetivo.

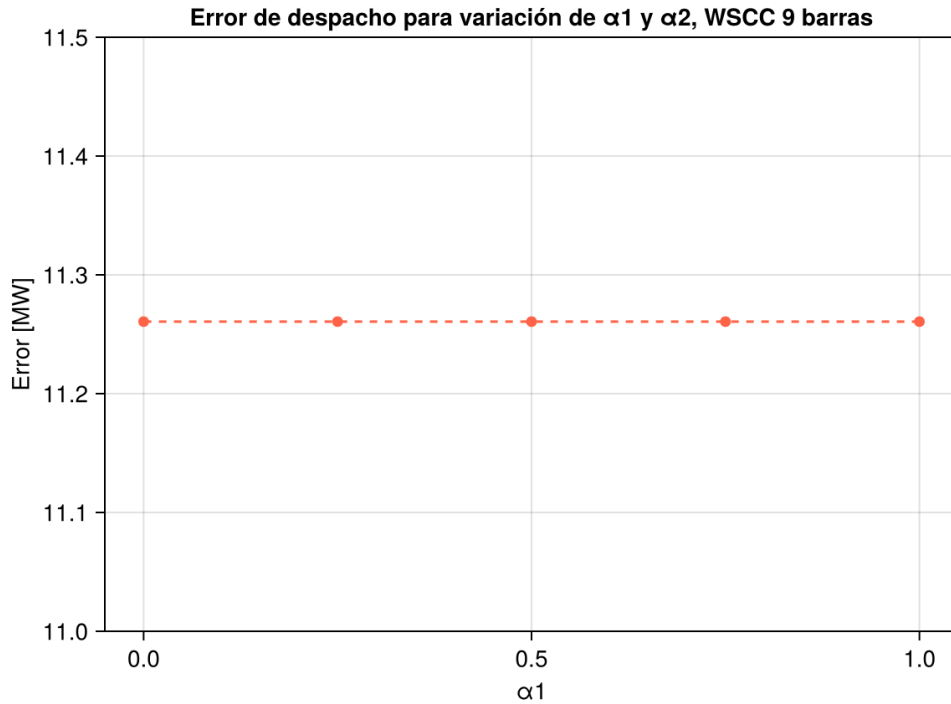


Figura 5.12: Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

5.2.1.4. Variación en ponderadores de distancias

En la presente sección se busca evaluar el comportamiento del modelo frente a variar la ponderación de la distancia acumulada en la función objetivo, respecto al error de despacho. Esto es, variar los parámetros β_1 y β_2 frente a α_1 , donde β_1 pondera el largo de camino mínimo acumulado y β_2 la distancia euclidiana acumulada.

Para las simulaciones se consideran como parámetros fijos la cantidad de nodos de la red equivalente $n = 3$, $\alpha_2 = 0$ y $\gamma = 0$. En la primera simulación se considera $\beta_2 = 0$ y una relación convexa entre el error de despacho punto a punto y el largo de camino mínimo acumulado, es decir, $\beta_1 = 1 - \alpha_1$, recorriendo los valores de 0 a 1, a un paso de 0.25. La segunda simulación fija el valor de $\beta_1 = 0$ y también describe una relación convexa entre el error de despacho punto a punto y la distancia euclidiana acumulada, para los mismos valores.

En la figura 5.13 se presentan los resultados obtenidos frente a la variación de β_1 , mientras que la figura 5.14 presenta los resultados de error de despacho frente a la variación de β_2 .

Es posible notar que el error de despacho mínimo para ambos ponderadores de distancia se alcanza cuando se considera solo α_1 en la función objetivo. Por otra parte, cuando se considera una fracción de α_1 y alguno de los dos ponderadores de distancia β_1 o β_2 , el error siempre es mayor a considerar solo el ponderador de distancia.

En el caso del largo de camino mínimo, no es posible describir un comportamiento general, puesto que el error aumenta conforme aumenta el valor de β_1 , pero es menor al considerarse

solo β_1 en la función objetivo. Para la distancia euclidiana ocurre lo contrario, es decir, el error disminuye a medida que β_2 aumenta y esta relación se mantiene, encontrando el mínimo considerando β_2 cuando este se presenta de forma única en la función objetivo.

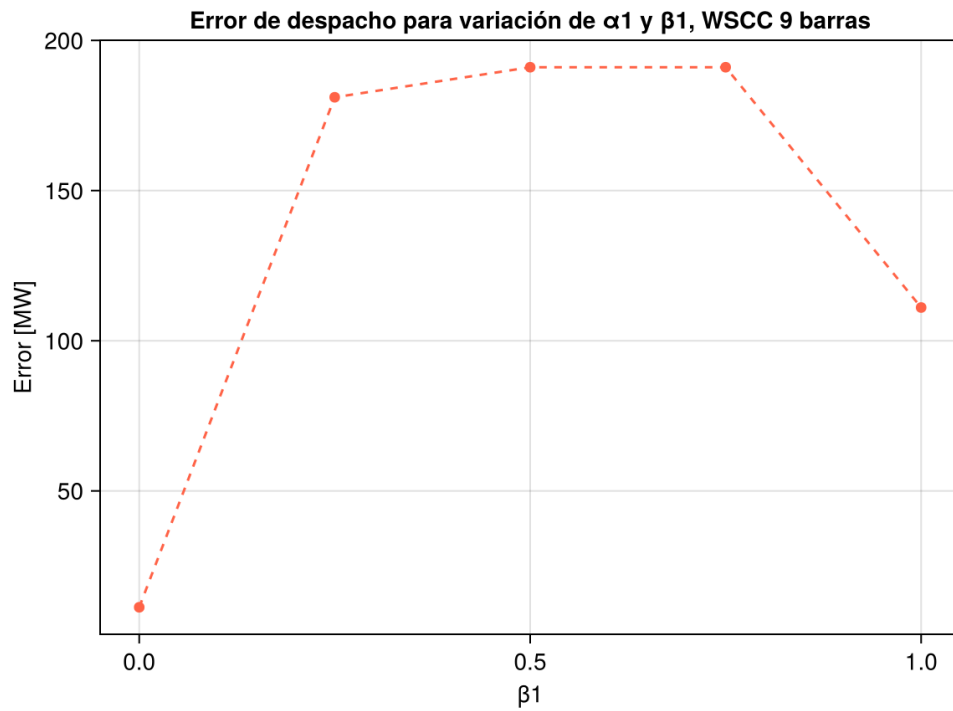


Figura 5.13: Error de despacho para variación de α_1 y β_1 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

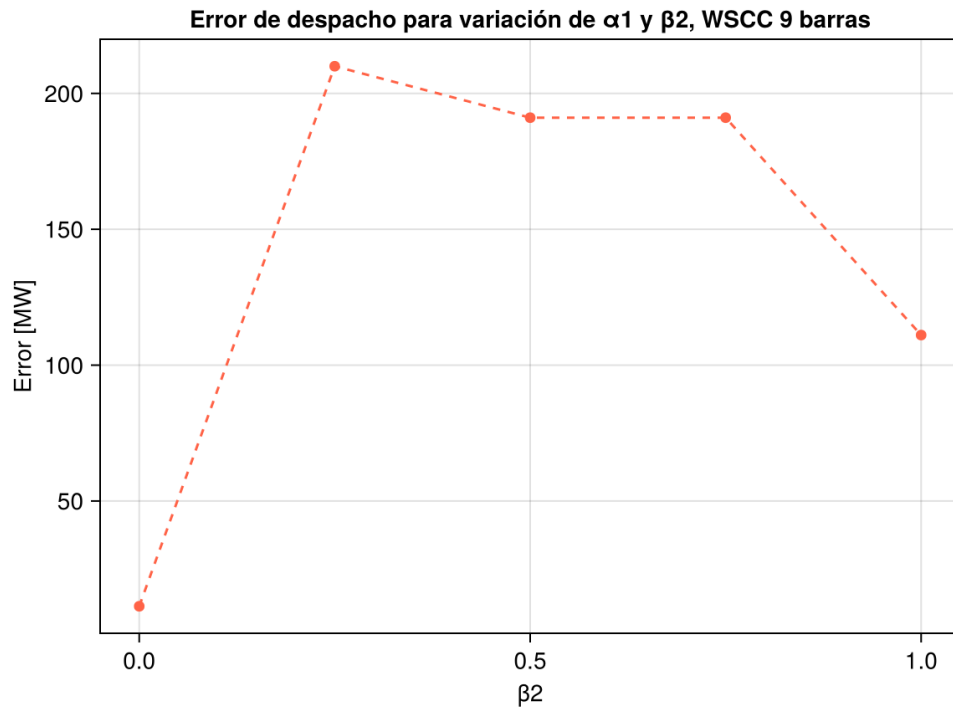


Figura 5.14: Error de despacho para variación de α_1 y β_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

5.2.1.5. Variación en ponderador de costo

A continuación se busca demostrar el comportamiento del modelo frente a variar la ponderación del error del costo total del despacho respecto al error de despacho, es decir, variar γ frente a α_1 .

Para las simulaciones se consideran como parámetros fijos la cantidad de nodos de la red equivalente $n = 3$ y los ponderadores $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 0$. Al igual que en las secciones anteriores, se propone una relación convexa entre el error de despacho punto a punto y el error de costos totales, es decir, $\gamma_1 = 1 - \alpha_1$, recorriendo los valores de 0 a 1, a un paso de 0.25.

En la figura 5.15 se presenta el error de despacho obtenido frente a la variación de γ , donde es posible observar que el error solo cambia cuando se considera γ por sí solo. De esta forma, se desprende que el error de despacho punto a punto asociado a α_1 toma mayor relevancia en el modelo para describir la red equivalente, puesto que en presencia de este ponderador, la red equivalente respeta minimizar el error de despacho.

Adicionalmente, se presenta el error en el costo del despacho en la figura 5.16, donde se observa que tiene un comportamiento inverso al del error de despacho y solo se alcanza un error nulo en el costo del despacho cuando γ toma el valor de 1 y α_1 no se considera.

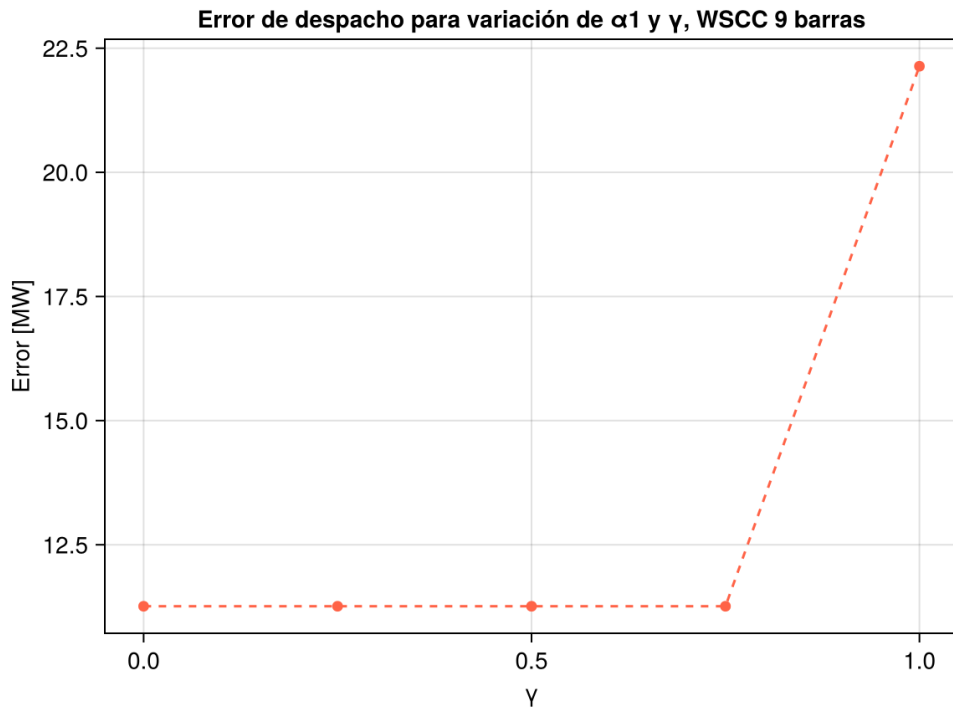


Figura 5.15: Error de despacho para variación de α_1 y γ de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

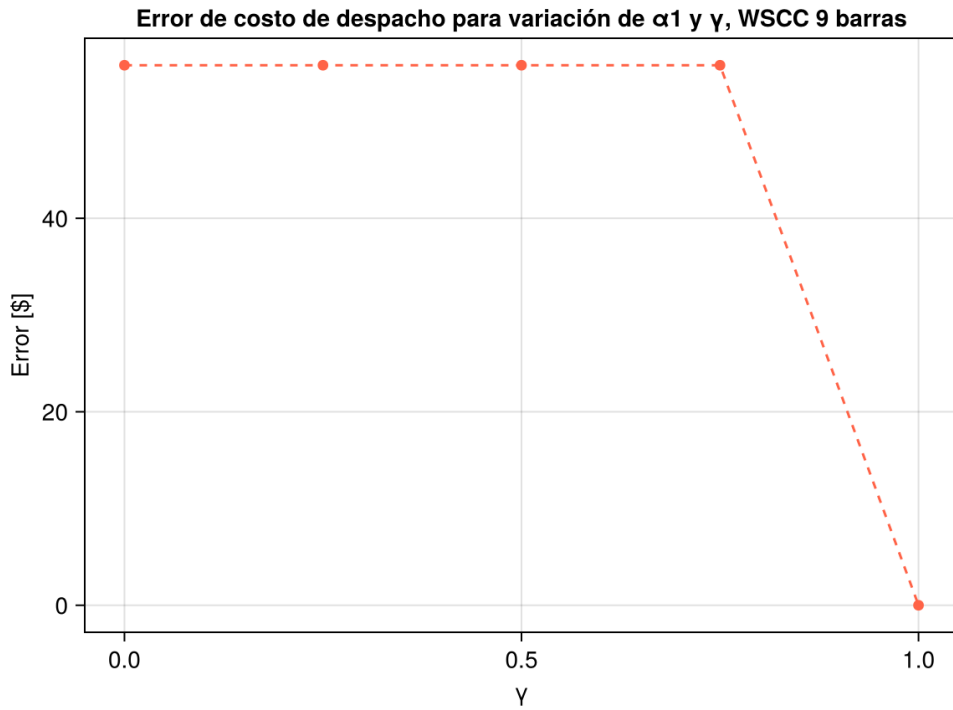


Figura 5.16: Error de costo de despacho para variación de α_1 y γ de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.

5.2.1.6. Exploración de modelo con dimensión temporal

En la sección 3.6 se presenta el modelo de reducción de nodos incorporando la dimensión del tiempo. A continuación se describen los resultados de estudiar el modelo frente a una demanda de 24 horas que se basa en las demandas Día y Noche. Para las simulaciones se define la cantidad de nodos de la red equivalente $n = 3$ y los parámetros de la función objetivo fijos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$.

En primer lugar, se describen los resultados de correr el modelo de reducción nodal para la demanda Día (una hora) y Noche (una hora) por separado, bajo los parámetros descritos previamente.

La figura 5.17 presenta la estructura de la red equivalente resultante de correr el modelo de reducción nodal para la demanda Día, y la tabla 5.5 las características de las líneas definidas por el modelo.

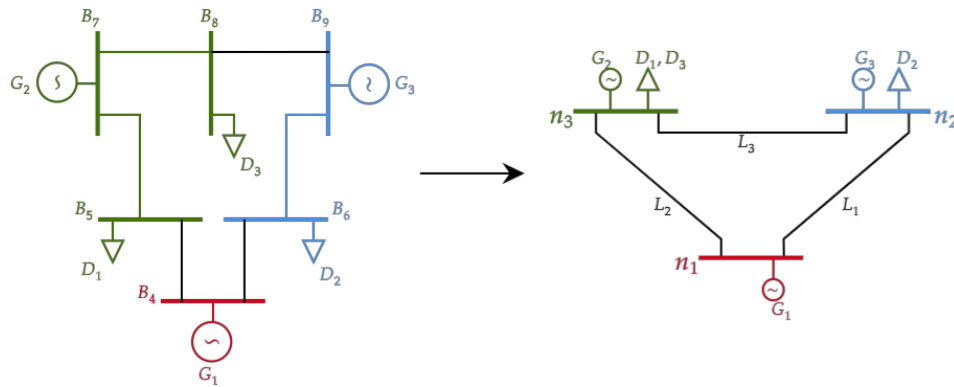


Figura 5.17: Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda Día.

Tabla 5.5: Características de líneas para red equivalente WSCC 9 barras, demanda Día.

Línea	Barras	Reactancia [p.u.]	Capacidad máxima [MW]
L_1	1-2	0.0982	70
L_2	1-3	0.0576	90
L_3	2-3	0.0576	50

Por otra parte, la figura 5.18 describe la estructura de la red equivalente resultante del modelo de reducción de nodos para la demanda Noche y la tabla 5.6 las características de las líneas definidas por el modelo. Es posible notar que, si bien la estructura de la red equivalente para la demanda Día y Noche es la misma, las características de las líneas no, por lo que ambas redes son diferentes.

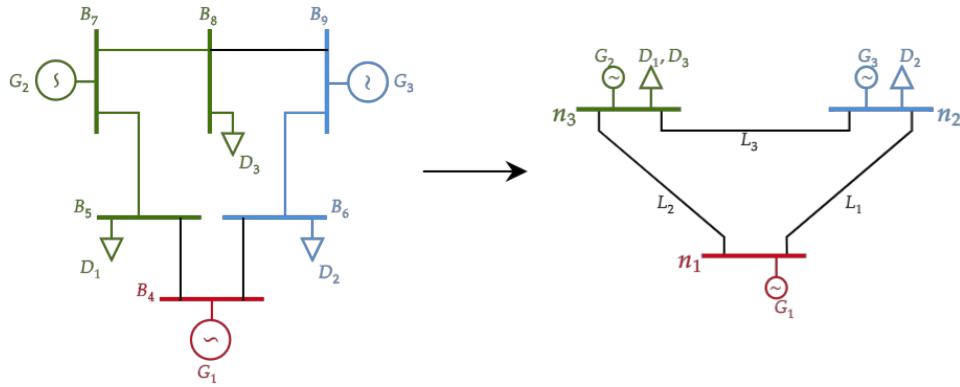


Figura 5.18: Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda Noche.

Tabla 5.6: Características de líneas, red equivalente WSCC 9 barras, demanda Noche.

Línea	Barras	Reactancia [p.u.]	Capacidad máxima [MW]
L_1	1-2	0.0928	70
L_2	1-3	0.0576	90
L_3	2-3	0.0566	50

Posteriormente, se corre el modelo de reducción de nodos para la demanda de 24 horas que se define a partir de las demandas Día y Noche como se presenta en la tabla 4.8.

La figura 5.19 describe la estructura de la red equivalente asociada a la demanda de 24 horas y la tabla 5.7 las características de las líneas definidas por el modelo. En este caso, ni la estructura ni las características de la red se comparten con las redes anteriores.

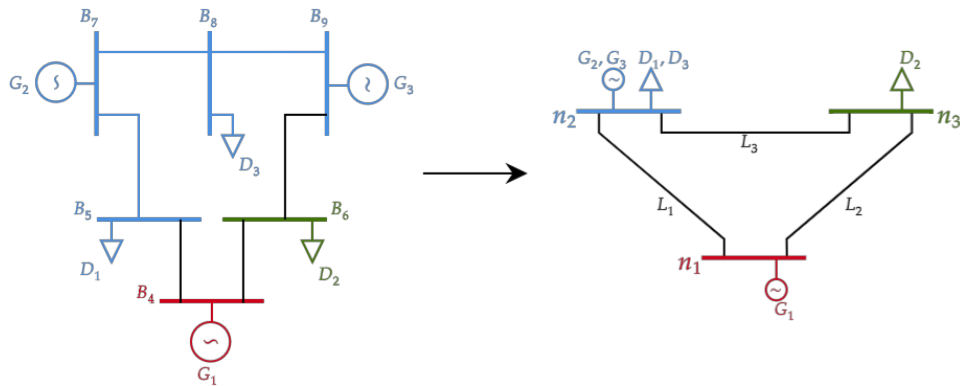


Figura 5.19: Red equivalente de red WSCC 9 barras a 3 nodos, demanda de 24 horas.

Tabla 5.7: Características de líneas, red equivalente WSCC 9 barras, demanda 24 horas.

Línea	Barras	Reactancia [p.u.]	Capacidad máxima [MW]
L_1	1-2	0.0928	90
L_2	1-3	0.0576	70
L_3	2-3	0.0566	70

En la tabla 5.8 se describen los resultados de realizar el despacho económico para la demanda de 24 horas sobre las tres redes equivalentes descritas anteriormente. Al correr el despacho de 24 horas sobre las tres redes equivalentes propuestas, aquella obtenida con la demanda Día es la que presenta menores errores de despacho y costo total. El despacho para la red asociada a la demanda Noche es la que tiene mayor error de costo total, pero los errores de despacho son menores que para la red obtenida con la demanda de 24 horas.

Los resultados obtenidos reflejan la composición de la demanda de 24 horas, ya que esta tiene mayor proporción de demanda de día que de noche. De esta forma, es esperable que la red equivalente de Día tenga mejor comportamiento frente a la de Noche. Sin embargo, se esperaría que la red equivalente asociada a la demanda de 24 horas tuviera un rendimiento mejor o igual que la de Día, pero esto no es así para ninguno de los indicadores. Lo anterior se puede explicar porque, al resolver de forma computacional el problema, el modelo identifica mínimos que a veces son locales, mas no globales.

Tabla 5.8: Resultados de despacho para la demanda de 24 horas sobre las tres redes equivalentes propuestas.

	Red equivalente		
	Día	Noche	24 horas
Error despacho [MW]	1169.21	2639.93	4279.08
Error despacho máximo [MW]	55.57	86.87	90.0
Error costo total [\$]	3342.41	9506.60	7512.15
Error costo total [%]	4.98	14.17	11.42

5.2.2. Modelo IEEE 14 barras

Para ilustrar lo que ocurre en modelos con una mayor cantidad de nodos, se utiliza la red IEEE 14 barras descrita en la sección 4.3. Se consideran los valores para los parámetros de la función objetivo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $\gamma = 0$, y se hace variar la cantidad de nodos de la red.

Al realizar las simulaciones sobre la red IEEE 14 barras para la demanda propuesta en 4.12, se obtienen los resultados presentados en la figura 5.20, donde solo se observa el error de despacho para $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, puesto que para 8, 10, 11, 12 y 13 nodos no hay factibilidad de red equivalente.

En primer lugar, se debe destacar que, si bien para 3 nodos el error es menor que para 4 y 5 nodos en la red equivalente, se observa la misma tendencia de disminución de error al aumentar la cantidad de nodos. La infactibilidad de la red equivalente para los nodos que no presentan resultados se debe principalmente al ajuste de las características de la red y las restricciones que fijan límites para los valores de capacidad máxima y/o variación de flujo.

Al relajar dichas restricciones, es posible obtener redes equivalentes para todas las cantidades de nodos y siempre se obtiene menor error que frente a la presencia de las restricciones, pero las características de la red pierden coherencia con la red inicial.

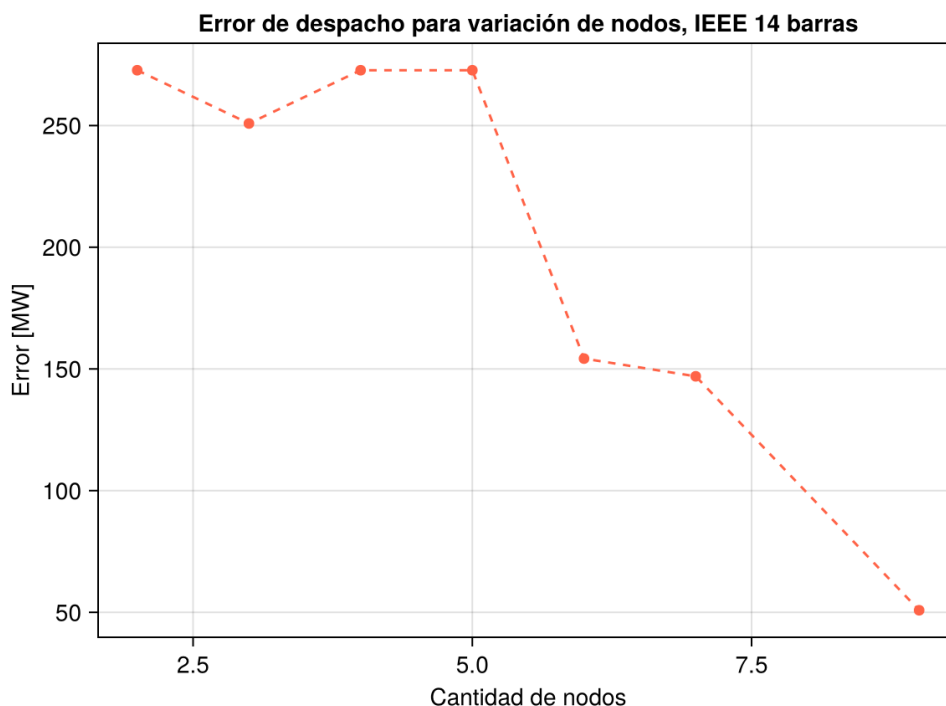


Figura 5.20: Error de despacho para variación de nodos de la red equivalente de IEEE 14 barras.

A modo de ilustración, en la figura 5.21 se presenta el resultado de asignación del modelo IEEE 14 barras a 9 nodos.

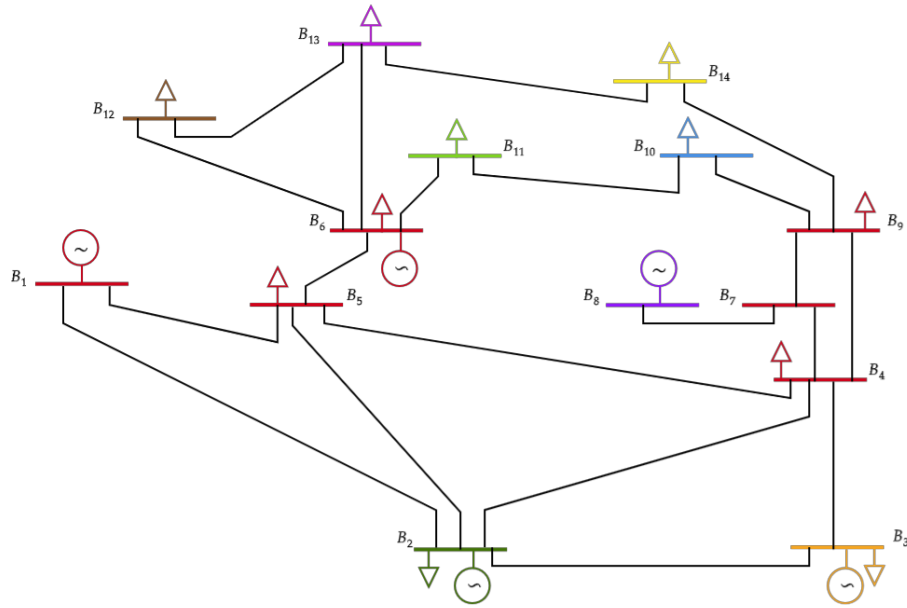


Figura 5.21: Resultado de modelo de reducción de nodos, IEEE 14 barras a 9 nodos.

El problema de despacho económico multinodal con flujo DC para esta red consta de 39 variables continuas y 84 restricciones, mientras que el mismo problema para la red equivalente de 9 nodos estas disminuyen a 24 variables y 49 restricciones. Para obtener esta red equivalente el modelo de reducción nodal consta de 306 variables binarias, 195 variables continuas y 7922 restricciones.

Es importante destacar que si bien el modelo de reducción nodal es de mayor complejidad que el de despacho económico en ambas instancias, la reducción se puede realizar de manera *off-line* y el despacho económico sobre la red equivalente es de menor complejidad que sobre la red original, reduciendo el tiempo computacional que se necesita en instancias que se realizan *on-line*.

5.3. Comparación con método de Ward

De forma ilustrativa, se considera el método de Ward descrito en [15] para un despacho económico sobre la red IEEE 14 barras descrita anteriormente.

Para el equivalente de Ward se consideran dos configuraciones que son comparadas con el equivalente de 9 nodos de la red IEEE 14 barras. La primera configuración elige el sistema interno y externo de forma aleatoria, y a partir de eso realiza el equivalente, mientras que la segunda considera la asignación nodal propuesta en la figura 5.21, donde las barras rojas corresponden al sistema externo, con excepción de la barra B_5 , que se dispone como barra de borde.

En la tabla 5.9 se presentan los resultados del despacho económico para la demanda propuesta en 4.12 sobre las redes equivalentes obtenidas mediante las distintas metodologías,

donde Ward 1 corresponde a la configuración aleatoria y Ward 2 a la que se encuentra basada en la asignación nodal.

El modelo propuesto en este trabajo posee un desempeño mejor que el modelo de Ward en las dos instancias propuestas, lo que se debe principalmente a que el modelo de Ward, y en general ninguno de los modelos presentados en la literatura revisada, proponen encontrar redes equivalentes que reproduzcan el despacho económico.

Tabla 5.9: Resultados de despacho económico para equivalentes a través de método de Ward y modelo de reducción de nodos propuesto.

	IEEE 14 bus	Ward 1	Ward 2	Modelo propuesto
G_1 [MW]	74.56	95.42	100.0	100.0
G_2 [MW]	0.0	82.77	79.36	0.0
G_3 [MW]	48.06	46.34	79.64	48.06
G_4 [MW]	96.36	34.47	0.0	70.94
G_5 [MW]	40.0	0.0	0.0	40.0
Error despacho [MW]	–	205.52	272.74	50.86
Costo total [\$]	4021.01	2689.28	2488.18	3639.69
Error costo total [\$]	–	1331.73	1532.83	381.32

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del modelo de optimización propuesto fue posible obtener una red equivalente que efectivamente minimiza el error de despacho entre los resultados de ambas redes (inicial y equivalente), y mediante la modificación de distintos parámetros se cumplen los objetivos propuestos. A causa de la incorporación del error absoluto entre el despacho de cada generador a la función objetivo, se cumple el primer y principal requerimiento, donde el modelo propone una asignación nodal y determina las características de las líneas para ajustar el despacho.

Debido a que existen restricciones sobre las características de la red, no siempre es factible obtener redes equivalentes. Sin embargo, cuando es factible, esta red permite realizar un despacho económico multinodal con flujo DC y es óptima en términos del error de despacho para los puntos de operación estudiados. Las restricciones sobre la asignación de nodos permiten cumplir con los requerimientos asociados a la asignación de recursos y nodos, de forma que en la red equivalente se encuentran la totalidad de los recursos. A pesar de que no siempre hay factibilidad, las restricciones propuestas aseguran que cuando la hay, la topología de la red y sus características sean coherentes con la red original, tal como se plantea en los requerimientos del modelo.

El requerimiento 6, asociado a la conexidad de los sub-grafos que se generan en cada nodo equivalente, es resuelto mediante la incorporación de un término en la función objetivo y un conjunto de restricciones. Si bien este conjunto de restricciones aumenta bastante la complejidad del modelo, asegura la coherencia en la agrupación de nodos de la red equivalente, puesto que la función objetivo no basta para hacerlo. Por otra parte, para cumplir con el requisito asociado a la distribución geográfica, se incorpora un término a la función objetivo. A partir de los resultados propuestos, se notó que al activar dicho término en el modelo, efectivamente la red es más consistente con la distribución geográfica, pero esto es en desmedro del error de despacho económico.

A partir de los resultados expuestos, fue posible concluir que la red equivalente no necesariamente es única, puesto que diferentes asignaciones y características de la red permiten llegar al mismo error de despacho. Sin embargo, en todas las asignaciones es posible establecer una relación clara entre la red original y la red equivalente.

Por otra parte, al configurar el modelo para disminuir el error de despacho, las congestiones de las líneas y/o los generadores en el despacho original tienen gran influencia en las

características de la red equivalente y el error asociado. Así mismo, la red equivalente depende fuertemente de los puntos de operación utilizados para su definición. Si bien esto es una característica no deseable, se puede conjeturar que al aumentar la cantidad de puntos de operación utilizados para describir la red equivalente sería posible obtener una red que funcione para un gran rango de operación.

La cantidad de nodos sobre la que se define la red equivalente toma gran relevancia sobre el error de despacho. Se observó una tendencia de disminución del error al aumentar la cantidad de nodos de la red equivalente. Sin embargo, existen casos donde el error de despacho en redes con mayor cantidad de nodos es ligeramente menor que aquellas con menor cantidad.

Al analizar los distintos parámetros, se concluye que no existe diferencia entre utilizar el error de despacho punto a punto o el error de despacho máximo. Tampoco existe diferencia entre utilizar el error de despacho en conjunto con el error de costos totales, pero sí cuando solo se ocupa el error de costos, donde se presenta mayor error de despacho que en el caso base. Cuando se incorpora la penalización de las distancias, ya sea del largo de camino mínimo o de la distancia euclidiana, el error de despacho puede aumentar. De esta forma, la red equivalente con menor error de despacho es aquella que solo considera el error de despacho punto a punto (o máximo) en la función objetivo.

Se remarca que si bien la mayoría de los resultados exhiben lo esperado, cuando se evalúa el modelo frente a una demanda de 24 horas, se encuentra un mínimo local, mas no global. A pesar de que este resultado no es el óptimo, este sí cumple con los requisitos físicos y geográficos propuestos.

Cabe destacar que el modelo cumple con todos los requisitos propuestos, sin embargo el despacho de potencia que es resultado directo del modelo no necesariamente es un despacho de costo mínimo sobre la red equivalente, puesto que esta restricción no se encuentra incorporada en el modelo. Aún así, los resultados de despacho presentados para la red equivalente corresponden a despachos de mínimo costo y en algunos casos estos son iguales a los despachos obtenidos del modelo de reducción de nodos.

Dado que el modelo es un programa lineal mixto con variables binarias, restricciones cuadráticas y bilineales, el modelo tiene una complejidad de al menos *NP-hard*. Por lo tanto, para sistemas pequeños el problema se puede resolver de forma eficiente mediante el *solver* propuesto, pero para instancias de mayor tamaño, no es posible resolverlo en tiempos razonables. A pesar de lo anterior, la obtención de la red equivalente se puede realizar de forma *off-line* y sus resultados se traducen en una clara disminución de la cantidad de variables y restricciones en el problema de despacho económico, por lo cual la restricción de tiempo pierde relevancia en esta etapa del estudio.

Finalmente, se remarca que se cumplieron los objetivos propuestos y, por tanto, este trabajo contribuye al estudio de redes equivalentes, y en particular, redes equivalentes para el despacho económico. Además, debido a la forma en que se construyó la metodología y el modelo de optimización de reducción de nodos, este puede ser extendido para complejizar el despacho económico o para otro tipo de problemas sobre redes eléctricas.

6.1. Trabajo futuro

La metodología tiene limitaciones, como la complejidad y la resolución computacional. Dadas las características del modelo, se podrían linealizar las restricciones bi-lineales para disminuir los tiempos de resolución o relajar algunas restricciones, bajo el riesgo de perder optimalidad. Por otra parte, dado que las restricciones que ralentizan el modelo son las de conexidad, estas podrían incorporarse bajo un esquema *master-slave* o mediante algoritmos de resolución. En consecuencia, explorar formulaciones equivalentes del modelo y estudiar alternativas que permitan aumentar su eficiencia corresponde a uno de los principales trabajos a futuro.

Por otra parte, para asegurar que los resultados del modelo de reducción de nodos proponen un despacho a mínimo costo, se debe incorporar explícitamente esta condición a la formulación. Esto podría realizarse mediante un modelo bi-nivel, donde uno de ellos corresponde al despacho económico sobre la red equivalente y el otro a la asignación de nodos.

Los resultados propuestos en este trabajo permiten demostrar el funcionamiento del modelo y el cumplimiento de sus objetivos. Sin embargo, se debe seguir estudiando su comportamiento al utilizar múltiples puntos de operación en la definición de la red equivalente y cómo responde la red frente a nuevos puntos de operación.

El modelo tiene capacidad de expansión dentro del despacho económico y para otro tipo de problemas. Para mantener cierta linealidad en el modelo de optimización, se plantea un despacho económico multinodal con flujo DC considerando centrales convencionales, pero podrían incorporarse otros medios de generación u otros tipos de variables y restricciones, como demanda no servida o pérdidas óhmicas, entre otros. De esta forma, una extensión natural de este modelo corresponde a complejizar el modelo de despacho económico usado para hacerlo cada vez más realista.

En el modelo propuesto, la definición de las características de la red equivalente, como la impedancia y la capacidad de las líneas, se realiza a partir del conocimiento previo de la red original. Sin embargo, existen situaciones donde el conocimiento del sistema es parcial o nulo, como ocurre en algunos países donde la topología y características de la red eléctrica no es pública por razones de seguridad. Por tanto, sería útil explorar en mayor profundidad las metodologías de optimización inversa para determinar dichas características e incorporarlas al modelo propuesto.

Finalmente, la metodología que se plantea para construir las redes equivalentes puede ser replicada para otro tipo de desafíos en sistemas eléctricos, como el problema de pre-despacho o el de control de flujos, donde la topología de la red tiene gran relevancia, puesto que los requerimientos de asignación de nodos son transversales a la reducción de redes eléctricas y no están ligados exclusivamente al problema de despacho económico.

Bibliografía

- [1] Chahar, R. K., Shankar, A., Prasad, S., y Srivastava, S., “Designing a multi-objective novel strategy for economic dispatch solution using fuzzy sets, map-reduce, graph algorithms and machine-learning”, en 2020 2nd International Conference on Advances in Computing, Communication Control and Networking (ICACCCN), 2020, doi:10.1109/ICACCCN51052.2020.9362751.
- [2] Peng, J.-C., Wu, M.-H., Tan, S.-K., y Jiang, H., “Bus-privacy-preserving distributed economic dispatch method for power systems using iteration functions”, IEEE Access, vol. 10, 2022, doi:10.1109/ACCESS.2022.3199357.
- [3] Nagarajan, K., Rajagopalan, A., Bajaj, M., Sitharthan, R., Mohammadi, S. A. D., y Blazek, V., “Optimizing dynamic economic dispatch through an enhanced cheetah-inspired algorithm for integrated renewable energy and demand-side management”, Scientific Reports, vol. 14, 2024, doi:10.1038/s41598-024-53688-8.
- [4] Gupta, A. P., Mohapatra, A., y Singh, S. N., “Power system network equivalents: Key issues and challenges”, en TENCON 2018 - 2018 IEEE Region 10 Conference, 2018, doi:10.1109/TENCON.2018.8650397.
- [5] Fu, Y. y Chung, T., “A hybrid artificial neural network (ann) and ward equivalent approach for on-line power system voltage security assessment”, Electric Power System Research, vol. 53, 2000, doi:10.1016/S0378-7796(99)00060-7.
- [6] Padiyar, K., Power System Dynamics: Stability and Control. BS Publications, 2002.
- [7] Mohapatra, S., Jang, W., y Overbye, T. J., “Equivalent line limit calculation for power system equivalent networks”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 29, no. 5, 2014, doi:10.1109/TPWRS.2014.2300176.
- [8] Ashraf, S. M., Rathore, B., y Chakrabarti, S., “Performance analysis of static network reduction methods commonly used in power systems”, en 2014 Eighteenth National Power Systems Conference (NPSC), 2014, doi:10.1109/NPSC.2014.7103837.
- [9] Klein, D., Spieker, C., Rüberg, S., Liebenau, V., y Rehtanz, C., “Aggregation of large-scale electrical energy transmission networks”, en 2016 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), 2016, doi:10.1109/ENERGYCON.2016.7513897.
- [10] Huang, B., Shang, X. Y., Zheng, J. H., Li, Z., Wu, Q. H., y Zhou, X. X., “Electrical network equivalent modeling method with boundary buses interconnected”, en 2019

IEEE PES GTD Grand International Conference and Exposition Asia (GTD Asia), 2019, doi:10.1109/GTDAsia.2019.8716015.

- [11] Karbalaei, F., Jebreilzadeh, M., y Shabazi, H., “Reducing power system model dimensions based on linearization for static analysis”, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, vol. 26, no. 4, 2018, doi:10.3906/elk-1712-410.
- [12] Ramirez, J. M., Hernández, B. V., y Correa, R. E., “Dynamic equivalence by an optimal strategy”, *Electric Power System Research*, vol. 84, 2012, doi:10.1016/j.epsr.2011.09.023.
- [13] Grainger, J. J. y Stevenson, W., *Power System Analysis*. McGraw Hill, 1994.
- [14] Caliskan, S. Y. y Tabuada, P., “Towards kron reduction of generalized electrical networks”, *Sutomatica*, vol. 50, no. 10, 2014, doi:10.1016/j.automatica.2014.08.017.
- [15] Ward, J. B., “Equivalent circuits for power-flow studies”, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 68, no. 1, 1949, doi:10.1109/T-AIEE.1949.5059947.
- [16] Deckmann, S., Pizzolante, A., Monticelli, A., Stott, B., y Alsac, O., “Studies on power system load flow equivalencing”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, no. 6, 1980, doi:10.1109/TPAS.1980.319798.
- [17] Dy Liacco, T. E., Savulescu, S. C., y Ramarao, K. A., “An on-line topological equivalent of a power system”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-97, no. 5, 1978, doi:10.1109/TPAS.1978.354647.
- [18] Housos, E. C., Irisarri, G., Porter, R. M., y Sasson, A. M., “Steady state network equivalents for power system planning applications”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, no. 6, 1980, doi:10.1109/TPAS.1980.319789.
- [19] Lima, L. R., Leite da Silva, A. M., Lardim, J. L., y Castro, A. M., “A method to compute flexible static equivalents for very large power networks”, en *Simposio Brasileiro de Sistemas Eletricos*, 2018, doi:10.1109/SBSE.2018.8395897.
- [20] Shayasteh, E., Hamon, C., Ameli, M., y Söder, L., “Rei method for multi-area modeling of power systems”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 60, 2014, doi:10.1016/j.ijepes.2014.03.002.
- [21] Oh, H., “A new network reduction methodology for power system planning studies”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 25, no. 2, pp. 677–684, 2010, doi:10.1109/TPWRS.2009.2036183.
- [22] Cheng, X. y Overbye, T., “Ptdf-based power system equivalents”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 20, no. 4, 2005, doi:10.1109/TPWRS.2005.857013.
- [23] Thenmozhi, M., Sathishkumar, R., y Scholar, P. G., “A novel network reduction technique for power systemplanning studies with congestion profile”, *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, vol. 2, 2013, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55457298>.

- [24] Fortenbacher, P., Demiray, T., y Schaffner, C., “Transmission network reduction method using nonlinear optimization”, en 2018 Power Systems Computation Conference (PSCC), 2018, doi:10.23919/PSCC.2018.8442974.
- [25] Sturk, C., Vanfretti, L., Milano, F., y Sandberg, H., “Structured model reduction of power systems”, en 2012 American Control Conference (ACC), 2012, doi:10.1109/ACC.2012.6315207.
- [26] Sturk, C., Vanfretti, L., Chompoobutrgool, Y., y Sandberg, H., “Coherency-independent structured model reduction of power systems”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 29, no. 5, 2014, doi:10.1109/TPWRS.2014.2302871.
- [27] Chow, J. H., Power System Coherency and Model Reduction. Springer, 2013.
- [28] Nabavi, S. y Chakraborty, A., “Topology identification for dynamic equivalent models of large power system networks”, en 2013 American Control Conference, 2013, doi:10.1109/ACC.2013.6579989.
- [29] Yu, J., Dai, W., Li, W., Liu, X., y Liu, J., “Optimal reactive power flow of interconnected power system based on static equivalent method using border pmu measurements”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 33, no. 1, 2018, doi:10.1109/TPWRS.2017.2699231.
- [30] Wijeweera, G., Annakkage, U. D., Zhang, W., Rajapakse, A. D., y Rheault, M., “Development of an equivalent circuit of a large power system for real-time security assessment”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 33, no. 4, 2018, doi:10.1109/TPWRS.2017.2777339.
- [31] Liu, Z., Menke, J.-H., Bornhorst, N., y Braun, M., “Static grid equivalent models based on artificial neural networks”, IEEE Access, vol. 9, 2021, doi:10.1109/ACCESS.2021.3134373.
- [32] Wang, C., An, J., y Mu, G., “Power system network topology identification based on knowledge graph and graph neural network”, Front. Energy Research, vol. 8, 2020, doi:10.3389/fenrg.2020.613331.
- [33] Marinho, N., Phulpin, Y., Folliot, D., y Hennebel, M., “Network reduction based on multiple scenarios”, en 2017 IEEE Manchester PowerTech, 2017, doi:10.1109/PTC.2017.7981114.
- [34] Lee, B.-G., Lee, J., y Kim, S., “Development of a static equivalent model for korean power systems using power transfer distribution factor-based k-means++ algorithm”, Energies, 2020, doi:10.3390/en13246663.
- [35] Ribeiro, R., Street, A., Mancilla-David, F., y Angulo, A., “Equivalent reduced dc network models with nonlinear load functions: A data-driven approach”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 39, no. 2, 2024, doi:10.1109/TPWRS.2023.3274919.
- [36] Kekatos, V., Giannakis, G. B., y Baldick, R., “Grid topology identification using elec-

- tricity prices”, en 2014 IEEE PES General Meeting | Conference Exposition, 2014, doi:10.1109/PESGM.2014.6939474.
- [37] Chan, T. C. Y., Mahmood, R., y Zhu, I. Y., “Inverse optimization: Theory and applications”, 2022, h10.48550/arXiv.2109.03920.
- [38] Cavraro, G. y Kekatos, V., “Graph algorithms for topology identification using power grid probing”, IEEE Control Systems Letters, vol. 2, no. 4, 2018, doi:10.1109/LCSYS.2018.2846801.
- [39] Birge, J. R., Hortaçsu, y Pavlin, J. M., “Inverse optimization for the recovery of market structure from market outcomes: An application to the miso electricity market”, Operations Research, vol. 65, no. 4, 2017, doi:10.1287/opre.2017.1606.
- [40] Validi, H., Buchanan, A., y Lykhovyd, E., “Imposing contiguity constraints in political districting models”, Operations Research, vol. 70, no. 2, 2022, doi:10.1287/opre.2021.2141.
- [41] Karić, A., Konjić, T., y Jahić, A., “Power system fault detection, classification and location using artificial neural network”, en Advanced Technologies, Systems, and Applications II, pp. 89–101, Springer, Cham, 2018, doi:10.1007/978-3-319-71321-2_8.
- [42] Mohanpurkar, M. U., Computation of loop flows in electric grids with high wind energy penetration. PhD thesis, Colorado State University, 2013.
- [43] “The julia programming language”. Julia, <https://julialang.org/> (visitado el 18 de febrero de 2025).
- [44] “Gurobi optimizer reference manual”. Gurobi, <https://docs.gurobi.com/projects/optimizer/en/current/> (visitado el 18 de febrero de 2025).
- [45] “Gurobi optimization”. Gurobi, <https://www.gurobi.com/> (visitado el 18 de febrero de 2025).
- [46] “Algorithms for computing the minimal vertex separator of a graph”. Theoretical Computer Science Stack Exchange, <https://cstheory.stackexchange.com/q/29472> (visitado el 5 de julio de 2024).

Anexos

Anexo A. Conjuntos separadores

Para plantear las restricciones de conexidad se utilizan los conjuntos separadores entre dos vértices $u, v \in V$ no adyacentes. A continuación se procede a definir estos conjuntos.

Un subconjunto de vértices $S \subseteq V$ es (u, v) -separador si al sacar S del grafo, u, v quedan separados en distintas componentes conexas. Además, se considera que S (u, v) -separador es mínimo si no existe subconjunto de él que sea (u, v) -separador. Luego, se considera $C(u, v)$ como el conjunto de separadores mínimos de u, v .

$$C(u, v) = \{S \subseteq V : S \text{ es } (u, v)\text{-separador mínimo}\}$$

Para describir este conjunto se propone el algoritmo 1 basado en [46].

Algoritmo 1 $C(u, v)$ separadores mínimos.

```
Sean  $G_{V,E} = (V, E)$ ,  $u, v \in V$   
 $V_s \leftarrow V \setminus \{u, v\}$   
 $C(u, v) \leftarrow \emptyset$   
for  $S \subseteq V_s$  do  
   $G_S = G_{V,E}(V \setminus S, E)$   
   $R(S) = \{a \in V : \text{existe un camino entre } u \rightarrow a \text{ en } G_S\}$   
  if  $v \notin R(S)$  then  
     $S$  es  $(u, v)$ -separador  
    if  $C \not\subseteq S \quad \forall C \in C(u, v)$  then  
       $C(u, v) \leftarrow C(u, v) \cup S$   
    end if  
  end if  
end for  
 $C(u, v)$  es conjunto de  $(u, v)$ -separadores mínimos
```

A modo de ejemplo, en la figura 3.5, para las barras B_2 y B_4 , B_1 y B_3 son aquellas que las separan. Así, $S = \{B_1, B_3\}$ es un (B_2, B_4) -separador, y además es mínimo, pues si se considera solo B_1 , este no es separador (ya que existe un camino por B_3) y ocurre de forma análoga considerando solo B_3 . Luego, para el ejemplo en cuestión, S es el único conjunto separador mínimo de las barras propuestas y, en consecuencia, $C(B_2, B_4) = \{\{B_1, B_3\}\}$.

Anexo B. Red de 4 nodos, resultados de despacho

B.1. Para demanda Potencia 1

Tabla B.1: Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 1 y reducción a 2 nodos.

	Despacho económico		Modelo de
	Red original	Red equivalente	reducción de nodos
G_1 [MW]	117	117	117
G_2 [MW]	73	73	73
G_3 [MW]	0	0	0

Tabla B.2: Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 1 y reducción a 3 nodos.

	Despacho económico		Modelo de
	Red original	Red equivalente	reducción de nodos
G_1 [MW]	117	117	117
G_2 [MW]	73	73	73
G_3 [MW]	0	0	0

B.2. Para demanda Potencia 2

Tabla B.3: Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 2 y reducción a 2 nodos.

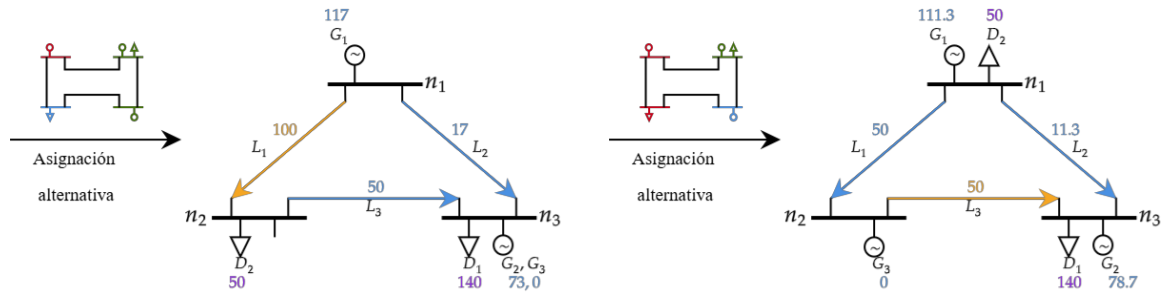
	Despacho económico		Modelo de
	Red original	Red equivalente	reducción de nodos
G_1 [MW]	130.4	130.4	130.4
G_2 [MW]	150.0	160.0	150
G_3 [MW]	19.6	9.6	19.6

Tabla B.4: Resultados de despacho de potencia para demanda Potencia 2 y reducción a 3 nodos.

	Despacho económico		Modelo de
	Red original	Red equivalente	reducción de nodos
G_1 [MW]	130.4	128.37	130.4
G_2 [MW]	150.0	160.0	150.0
G_3 [MW]	19.6	11.63	19.6

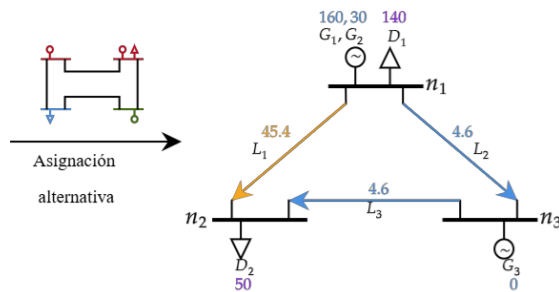
Anexo C. Red de 4 nodos, asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos

C.1. Para demanda Potencia 1



(a) Error de despacho: 0 [MW].

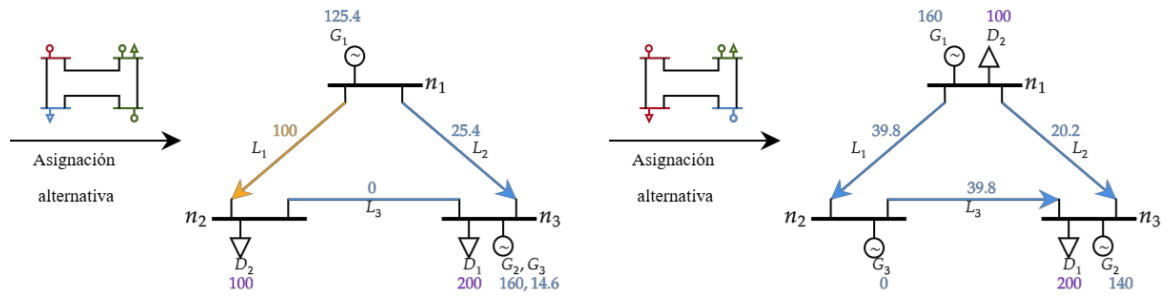
(b) Error de despacho: 11.4 [MW].



(c) Error de despacho: 86 [MW].

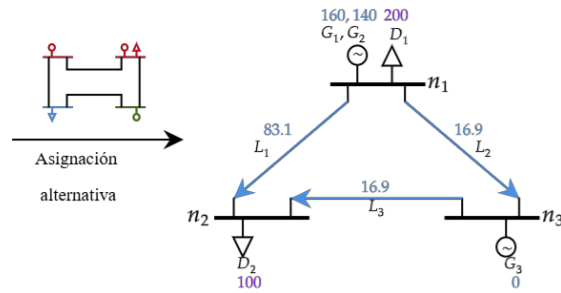
Figura C.1: Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos y sus respectivos errores de despacho.

C.2. Para demanda Potencia 2



(a) Error de despacho: 20 [MW].

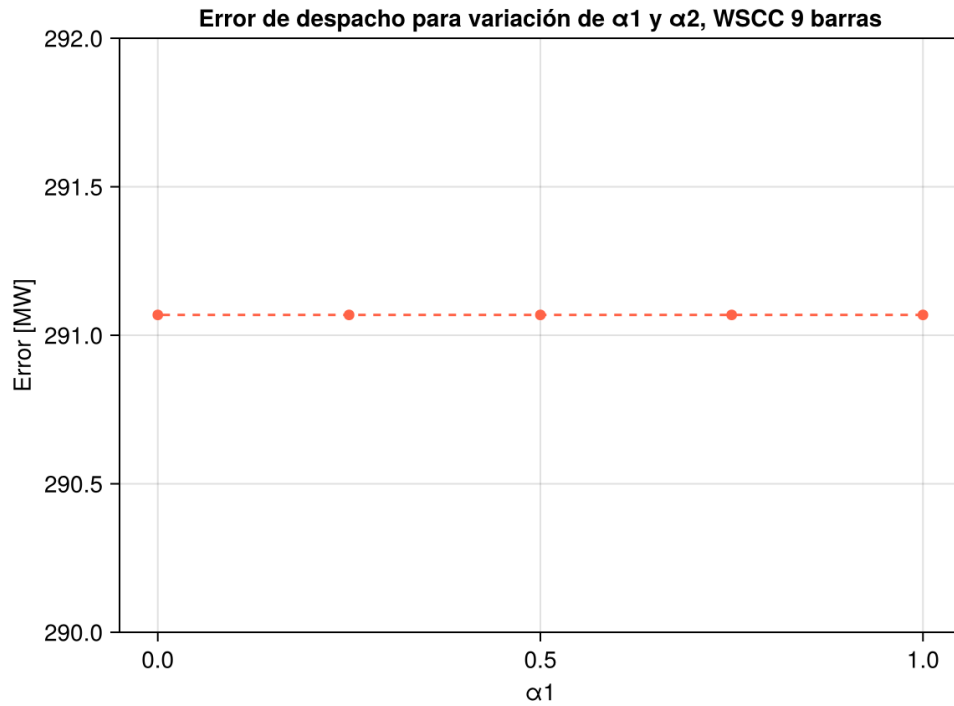
(b) Error de despacho: 59.2 [MW].



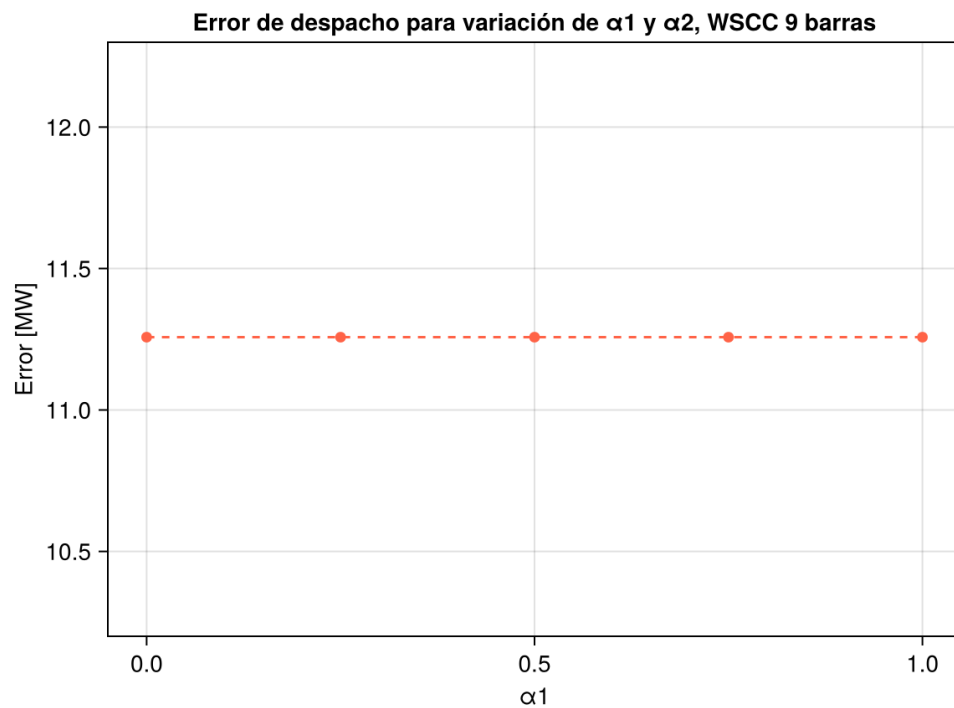
(c) Error de despacho: 59.2 [MW].

Figura C.2: Asignaciones alternativas de redes equivalentes de 3 nodos y sus respectivos errores de despacho.

Anexo D. Modelo WSCC 9 barras, variación en ponderadores de despacho

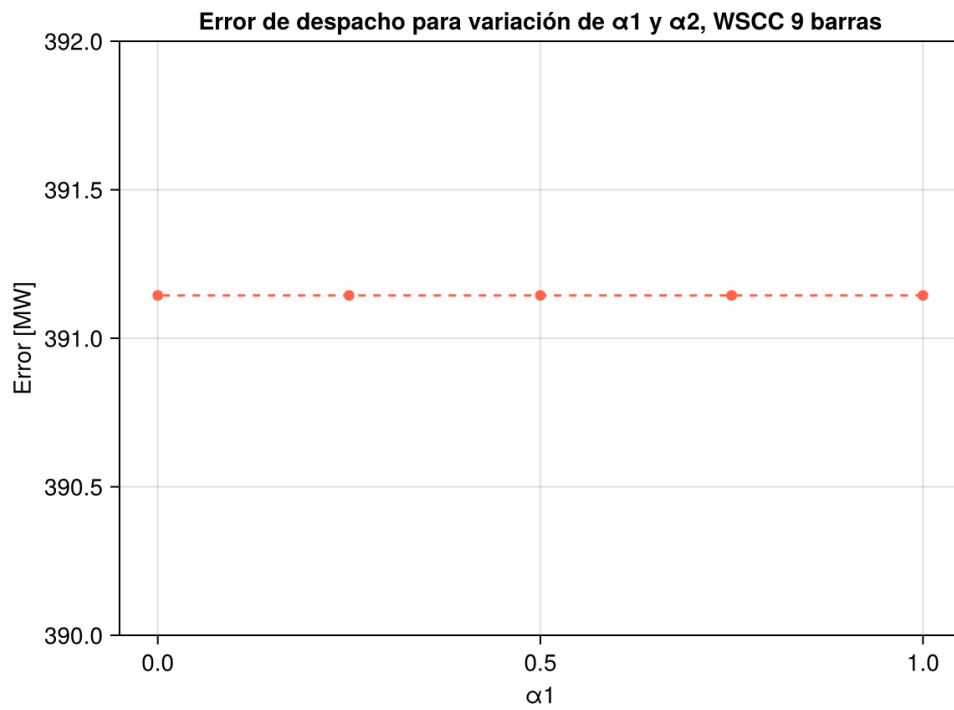


(a) Red equivalente de 2 nodos.

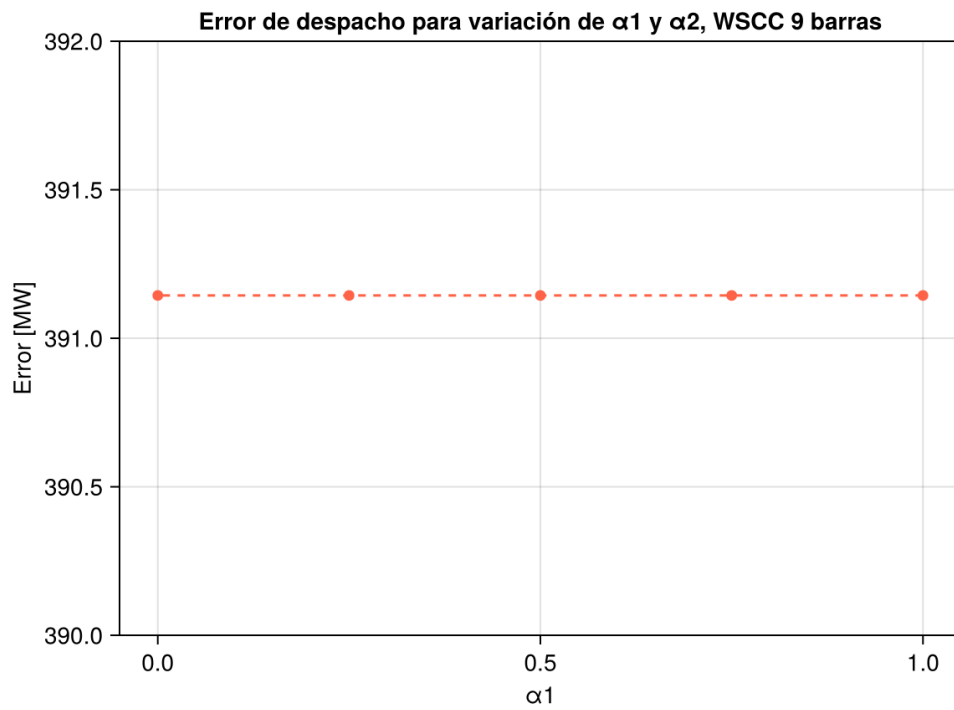


(b) Red equivalente de 4 nodos.

Figura D.1: Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Día.



(a) Red equivalente de 2 nodos.



(b) Red equivalente de 4 nodos.

Figura D.2: Error de despacho para variación de α_1 y α_2 de la red equivalente de WSCC 9 barras, demanda Noche.

Anexo E. Modelo IEEE 14 barras, resultados 9 nodos

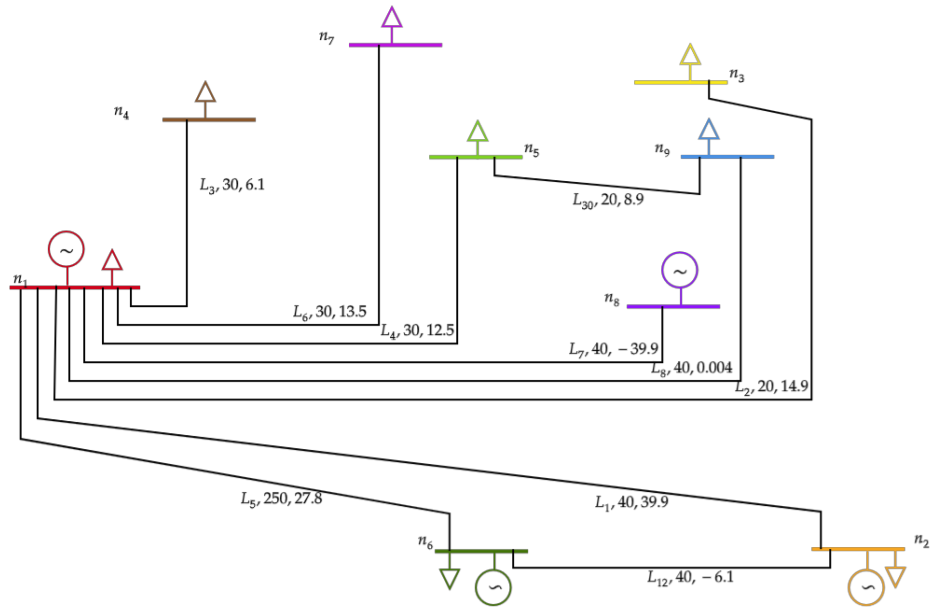


Figura E.1: Resultado de modelo de reducción de nodos, IEEE 14 barras a 9 nodos.